

# ► Das Geburtstagsproblem

Rüdiger Dieter Peter Paust



## Vorbemerkung

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter  $n$  Personen mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben? Für die Herleitung dieser Wahrscheinlichkeit empfiehlt es sich zuerst ein etwas einfacheres Beispiel anzusehen<sup>1</sup>, z.B.: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 4 Schülern mindestens 2 im gleichen Monat Geburtstag haben?“ Erst dann sollten wir das Geburtstagsproblem lösen.

## Herleitung

Wir definieren die beiden Ereignisse  $A$ : „unter  $n$  Personen haben mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag“ und das Gegenereignis  $\bar{A}$ : „unter  $n$  Personen haben alle an verschiedenen Tagen Geburtstag“. Dann erhalten wir die zu  $A$  gehörige Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{(365-n+1)}{365}$$

Oder durch Erweitern:

$$P(A) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{(365-n+1)}{365} \cdot \frac{(365-n)!}{(365-n)!}$$

$$= 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$$

## Graphische Darstellung

Die grafische Darstellung dieser Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von  $n$  funktioniert nicht so ohne weiteres mit dem Voyage™ 200. Mögliche Ursache: Fakultäten sind nur für 0 und positive ganze Zahlen definiert. Auch Tabellenkalkulationsprogramme streiken bei der Darstellung des zugehörigen Graphen. Nachfolgend nun eine Anleitung, wie die grafische Darstellung dennoch gelingen kann:

Wir speichern gemäß Abb. 1 die obige Formel unter  $p(n)$  ab, berechnen die Folge  $\text{seq}(n, n, 0, 100)$  und speichern das Ergebnis als Liste unter  $\text{anz}$  (steht für die Anzahl der Personen  $n$ ) ab. Eine zweite Folge  $\text{seq}(p(n), n, 0, 100)$  speichern wir unter  $\text{geb}$  (steht für die Geburtstagswahrscheinlichkeit  $P(A)$ ) ab. Hierzu müssen wir dem Voyage™ 200 etwas Zeit lassen. Wer diese nicht hat, lässt die beiden Folgen einfach bei 50 enden.

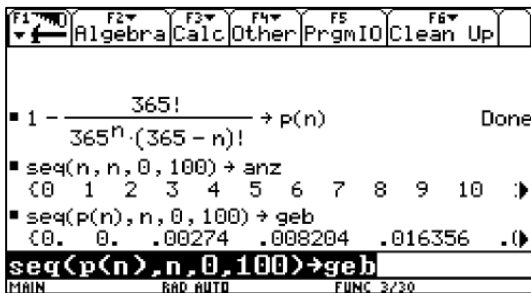


Abb. 1

Nun definieren wir im Data/Matrix Editor eine neues Datenblatt namens  $\text{birth}$  (steht für Birthday). Für  $\text{c1}$  geben wir  $\text{anz}$  ein und für  $\text{c2}$  entsprechend  $\text{geb}$ .

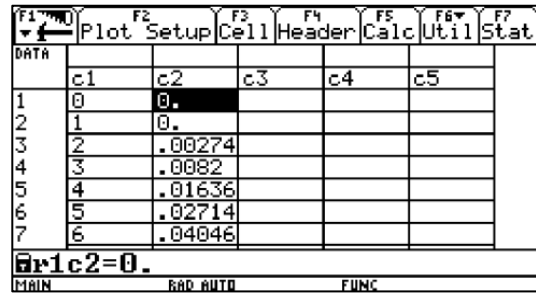


Abb. 2

Jetzt definieren wir noch einen Plot, legen die Window-Einstellungen geeignet fest ( $x_{\min}=0$ ,  $x_{\max}=100$ ,  $y_{\min}=0$ ,  $y_{\max}=1$ ) und betrachten das Ergebnis im Graph-Fenster:

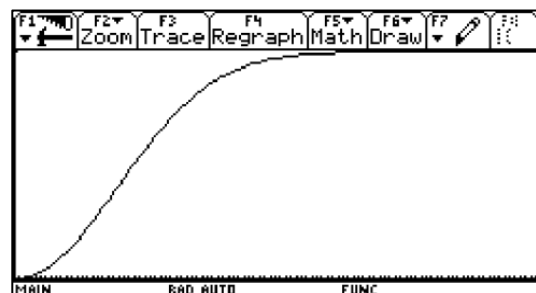


Abb. 3

## Funktionsanpassung

Als nächstes führen wir eine logistische Regression durch und speichern den Funktionsterm unter  $y1(x)$  ab.

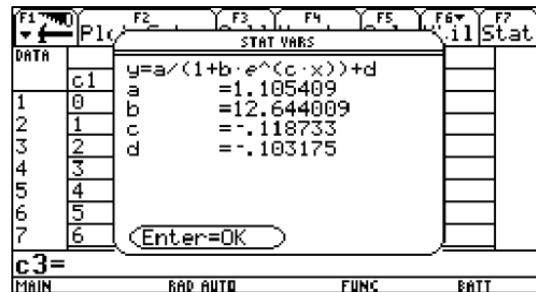


Abb. 4

Wir erhalten als sehr gute Näherung die Gleichung:

$$P(A) \approx y1(x) = \frac{1,105409}{1 + 12,644009 \cdot e^{-0,118733 \cdot x}} - 0,103175$$

## Abschließende Überlegungen

Nun lässt sich entweder durch Ausprobieren ermitteln, ab wie vielen Personen es lohnt zu wetten, dass 2 am gleichen Tag Geburtstag haben oder direkt über die Näherung:



Abb. 5

Das Ergebnis ist für Schülerinnen und Schüler durchaus verblüffend: Schon ab 23 Personen lohnt es, in eine Wette einzusteigen, d.h. dass hier die Wahrscheinlichkeit schon über 50% liegt.

Und wir gehen noch einen Schritt weiter: Ab 60 Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit schon 99% und ab 74 Personen liegen wir auf der absolut sicheren Seite, was das Wetten angeht! Folgende Abbildung soll das veranschaulichen:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
■	solve(y1(x) > .9, x)			x > 40.6026	
■	solve(y1(x) > .99, x)			x > 59.2073	
■	solve(y1(x) > .999, x)			x > 70.4826	
■	solve(y1(x) > .9999, x)			x > 73.2369	
■	solve(y1(x) > .99999, x)			x > 73.5688	
■	solve(y1(x) > .999999, x)			x > 73.6027	
<b>solve(y1(x) &gt; 0.999999, x)</b>					
MAIN	6AD AUTO	FUNC 6230			

Abb. 6

Viel Spaß beim Ausprobieren!

#### Literaturverweis:

<sup>1</sup> vgl. auch Lambacher / Schweizer: *Mathematik für berufliche Gymnasien – Jahrgangsstufenband*; Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2008 – 1. Auflage, Seite 343, Aufgabe 12

#### Autor

Rüdiger Dieter Peter Paust, Sinsheim (D)  
Friedrich-Hecker-Schule Sinsheim (Gewerbliche Schule)  
[paust.fhs@gmx.de](mailto:paust.fhs@gmx.de)