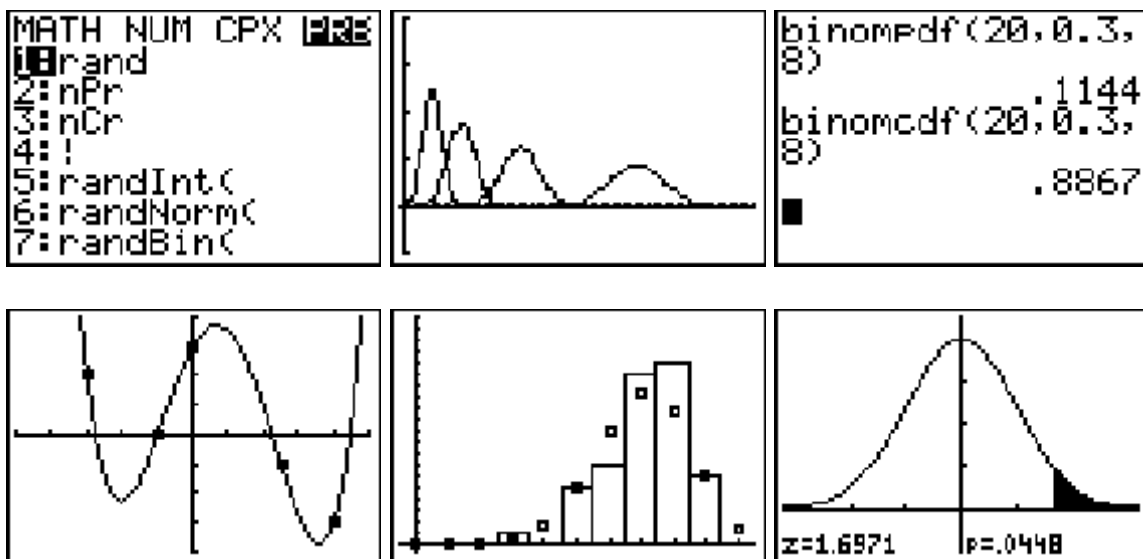


Dieter Brandt

Mathematik unterrichten
mit TI-83 und TI-83 Plus
in den Klassen 11 bis 13
– Baden-Württemberg –

Teil III – Stochastik



VORWORT	2
1 ÜBERBLICK ÜBER DIE WICHTIGSTEN STOCHASTIK-FUNKTIONEN	3
2 RECHNEN MIT DER BINOMIALVERTEILUNG.....	7
3 BINOMIALVERTEILUNG – ERWARTUNGSWERT UND STANDARDABWEICHUNG	12
4 TESTEN VON HYPOTHESEN.....	18
5 SIMULATION VON ZUFALLSEXPERIMENTEN	24
6 REGRESSION	32
7 MARKOFFKETTEN – EIN WAHLTHEMA MIT GTR.....	36
STICHWORTVERZEICHNIS	47

Vorwort

Die vorliegende Handreichung ist sowohl für die Lehrerfortbildung wie auch als Vorlage für den Unterricht gedacht. Die Auswahl der Themen und Befehle basiert auf der Konzeption des Lehrplans der Klasse 11 sowie der Wahlbereiche im Lehrplan für die Neue Gymnasiale Oberstufe (Klassen 12 und 13) am allgemeinbildenden Gymnasium in Baden-Württemberg. Die beschriebene Vorgehensweise ist in der Regel unterrichtetserprobt.

Einige Hinweis zur Benutzung dieser Handreichung:

- Es werden Grundkenntnisse im Umgang mit dem TI-83 Plus vorausgesetzt. Für Neueinsteiger wird empfohlen, zunächst in der Handreichung *Mathematik unterrichten mit TI-83 und TI-83 Plus in Klassenstufe 12 und 13 – Teil I - Analysis* - das Kapitel „Eine kurze Einführung in das Arbeiten mit dem TI-83 Plus“ – durchzuarbeiten. Dort werden allgemeine Vorgehensweisen und Eigenschaften des Rechners sowie Möglichkeiten, auf Fehler zu reagieren, sehr ausführlich vorgestellt.
- Es wird nur ein minimaler Befehlssatz verwendet, der sich in der Unterrichtspraxis bewährt hat. Eine wichtige Rolle spielen grafische Darstellungen.
- Bei komplexeren Sachverhalten ist durch Tastenkombinationen angegeben, wie der Rechner bedient wird. Außerdem sind die Bildschirmausgaben dargestellt.
- In Kapitel 1 wird zunächst ein Überblick über die Möglichkeiten des Rechners zur Bearbeitung stochastischer Probleme angegeben. Dort wird auf die in den weiteren Kapiteln ausführlich behandelten Themen verwiesen.
- In den Kapiteln 2 bis 4 wird im wesentlichen der Einsatz des Rechners beim Stochastikunterricht der Klasse 11 behandelt, also bei der Binomialverteilung und Hypothesentests. Es wird dabei viel Wert auf experimentelle Zugänge gelegt.
- In Kapitel 5 wird gezeigt, wie der Rechner bei stochastischen Experimenten zur Erzeugung von Zufallszahlen eingesetzt werden kann. Insbesondere können binomial verteilte Zufallszahlen erzeugt werden.
- Kapitel 6 behandelt den Einsatz des Rechners bei Kurvenanpassung, ein Thema, das besonders für den naturwissenschaftlichen Unterricht von Interesse ist.
- Bei Kapitel 7 geht es um das Wahlthema „Markoffketten“ aus JG 12/13, das mit dem Wahlthema „mehrstufige Prozesse“ aus Lerneinheit 5 (Lineare Gleichungssysteme, Vektoren) verwandt ist. Siehe dazu auch Teil II – Analytische Geometrie dieser Handreichung. Es bietet eine ideale Verbindung der Stochastik mit Inhalten der linearen Algebra (Matrizenrechnung, Gleichungssysteme) und der Analysis (Grenzwerte). Diese unterrichtserprobte Einheit lässt sich gut nach dem schriftlichen Abitur integrieren und bietet auch Stoff für Aufgaben des mündlichen Abiturs.
- Kapitel 1, 2, 5, 6, 7 können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Die Bearbeitung von Kapitel 3 setzt die Bearbeitung von Kapitel 2 voraus, die Bearbeitung von Kapitel 4 setzt die Bearbeitung von Kapitel 2 voraus. Außerdem werden in Kapitel 4 Erwartungswert und Standardabweichung benötigt, die z.B. wie in Kapitel 3 eingeführt werden können.
- Die Handreichung ist so gehalten, dass sich auch eine Schülerin oder ein Schüler damit selbstständig in ein Themengebiet einarbeiten kann (entsprechend dem Lehrplan JG 12/13, Vorschläge für selbstorganisiertes Lernen, andere Lernleistungen). Natürlich ist dann zusätzlich die Verwendung eines geeigneten Stochastik-Lehrbuches zu empfehlen.

Diese Handreichung kann nicht das Handbuch ersetzen, in dem alle Möglichkeiten des Rechners beschrieben sind. Hier geht es eher darum, mit möglichst wenig Aufwand ein unterrichtsorientiertes Arbeiten mit dem Rechner zu ermöglichen.

Das Material kann auch für den TI-83 verwendet werden.

1 Überblick über die wichtigsten Stochastik-Funktionen

Der folgende Überblick zeigt, dass der TI-83 Plus ein mächtiges Hilfsmittel zur Lösung stochastischer Probleme ist. Nur ein kleiner Teil davon wird nach dem Lehrplan von Baden-Württemberg im Schulunterricht gebraucht.

Es wird jedoch offensichtlich, dass der Rechner auch über die Schulzeit hinaus in vielen Studiengängen und Anwendungsbereichen nützlich sein kann, denn besonders statistische Berechnungen werden dort sehr oft benötigt.

Auf die in dieser Handreichung näher behandelten Funktionen wird jeweils hingewiesen.

I Zufallszahlen und Kombinatorik

Funktionen für Zufallszahlen und Kombinatorik finden sich im MATH-PRB -Menü; dieses Menü wird aufgerufen mit

MATH .

Beispiele für ihren Einsatz:

Die Funktion `rand` liefert Zufallszahlen aus dem Intervall $[0;1]$.

Wird in Klammern eine ganze Zahl angegeben, so wird eine Liste von Zufallszahlen entsprechender Länge ausgegeben, durch die man mit den Pfeiltasten rollen kann.

Die Funktionen `randInt`, `randBin`, `randNorm` liefern ganzzahlige bzw. binomial verteilte bzw. normal verteilte Zufallszahlen. Sie werden ausführlich in Kapitel 5 (Simulation von Zufallsexperimenten) behandelt.

„`n nPr k`“ liefert die Anzahl der möglichen Ausgänge beim Ziehen ohne Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln, wobei die Anordnung berücksichtigt wird. (Permutationen)

„`n nCr k`“ liefert die Binomialkoeffizienten, also die Anzahl der möglichen Ausgänge beim Ziehen ohne Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln, wobei die Anordnung nicht berücksichtigt wird. (Combinationen)

$n!$ liefert n Fakultät.

```
MATH NUM CPX MATH
1:rand
2:nPr
3:nCr
4:!
5:randInt(
6:randNorm(
7:randBin(
```

```
rand
.5827
rand(5)
(.9252 .3617 .4...
```

```
6 nPr 3 120.0000
6 nCr 3 20.0000
6! 720.0000
■
```

II Statistische Berechnungen

Statistische Berechnungen basieren auf dem Umgang mit Listen. Eine Liste ist ein Tupel, notiert in geschweiften Klammern, z.B. $\{2,4,5,3\}$. Beispiele zu Listen werden in Kapitel 5 behandelt.

Einige elementare Funktionen befinden sich im LIST-MATH-Menü; es wird aufgerufen mit

2nd **STAT** .

Als Argumente dieser Funktionen sind Listen einzugeben.

Die Verwendung soll am Beispiel der Funktionen `mean` (Mittelwert) und `stdDev` (Standardabweichung) gezeigt werden.

```
NAMES OPS MATH
1:min(
2:max(
3:mean(
4:median(
5:sum(
6:prod(
7↓stdDev(
8:variance(
```

Mit der ersten Variante von `mean` wird das arithmetische Mittel der Liste $\{2,4,5,3\}$ bestimmt, also $\frac{2+4+5+3}{4} = 3,5$.

Mit der zweiten Variante wird das arithmetische Mittel der Liste $\{2,4,5,3\}$ bestimmt, gewichtet mit der Liste $\{4,3,1,5\}$, also $\frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 5}{4 + 3 + 1 + 5} \approx 3,1$.

Analog wird jeweils die Standardabweichung berechnet.

```
mean({2,4,5,3})
      3.5000
mean({2,4,5,3},{
4,3,1,5})
      3.0769
█
```

```
stdDev({2,4,5,3})
      1.2910
stdDev({2,4,5,3},
{4,3,1,5})
      .9541
█
```

Weitere Funktionen für statistische Berechnung finden sich im STAT-CALC-Menü; es wird aufgerufen mit

□ `STAT` `▶`.

Ein Beispiel für den Einsatz der Regressions-Funktionen (3 bis C) wird ausführlich in Kapitel 6 behandelt.

```
EDIT [DEL] TESTS
1: 1-Var Stats
2: 2-Var Stats
3: Med-Med
4: LinReg(ax+b)
5: QuadReg
6: CubicReg
7: QuartReg
8: LinReg(a+bx)
9: LnReg
0: ExpReg
A: PwrReg
B: Logistic
C: SinReg
```

Es folgt ein Beispiel zum Einsatz der Funktion `1-Var Stats`.

Bei einer Messreihe werden verschiedene Körpergrößen ermittelt, die zunächst als Liste L_1 gespeichert werden.

Das Speichern der Liste geschieht mit

□ `STO▶` `2nd` `1` `ENTER`.

```
{168,175,178,154
,156,181,175,179
,192,158,177}→L1
{168.0000 175.0...
█
```

Der Aufruf von `1-Var Stats`

□ `STAT` `▶` `1` `ENTER`

ergibt dann nebenstehendes Display.

Ausgegeben werden der arithmetische Mittelwert der Listenwerte, die Summe der Listenwerte, die Quadratsumme der Listenwerte, empirische und theoretische Standardabweichungen, Länge der Liste, kleinster Listenwert, erstes Quartil, Median, drittes Quartil sowie maximaler Listenwert.

Um die Bedeutung der Quartile und des Medians zu veranschaulichen, kann folgendermaßen ein BoxPlot der Daten angefertigt werden.

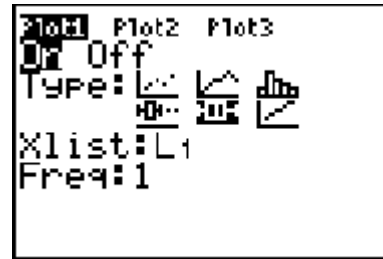
```
1-Var Stats
x̄=172.0909
Σx=1893.0000
Σx²=327169.000
Sx=11.8360
σx=11.2852
↓n=11.0000
minX=154.0000
Q1=158.0000
Med=175.0000
Q3=179.0000
maxX=192.0000
█
```

Dazu wird ein StatPlot definiert:

$\boxed{2nd}$ $\boxed{Y=}$ $\boxed{1}$

Der Plot wird auf On gesetzt, dann wird bei *Type* in der unteren Reihe der zweite Typ gewählt, um ein BoxPlot zu erzeugen.

Für *Xlist* wird die Voreinstellung L_1 beibehalten.



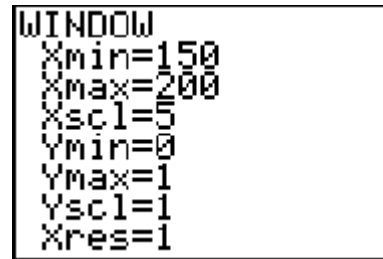
Nun kann der Plot grafisch dargestellt werden. Zuvor wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

\boxed{WINDOW}

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

Vor dem Zeichnen sind gegebenenfalls alle aktiven Funktionen im

$\boxed{Y=}$ -Fenster zu deaktivieren.

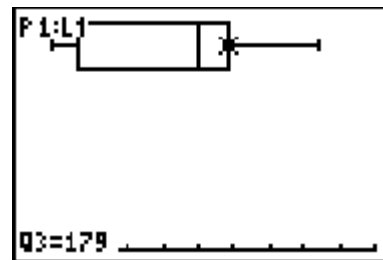


Der BoxPlot wird nun mit

\boxed{GRAPH}

dargestellt. Durch den dargestellten BoxPlot kann man sich mithilfe der \boxed{TRACE} -Taste und der Pfeiltasten bewegen und Werte ablesen.

In der Abbildung erkennt man z.B., dass das dritte Quartil Q_3 bei 179 liegt. Es bedeutet, dass 75% der Werte kleiner als Q_3 und 25% der Werte größer als Q_3 sind.



III Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wahrscheinlichkeitsverteilungen finden sich im \boxed{DISTR} -Menü; dieses Menü wird aufgerufen mit

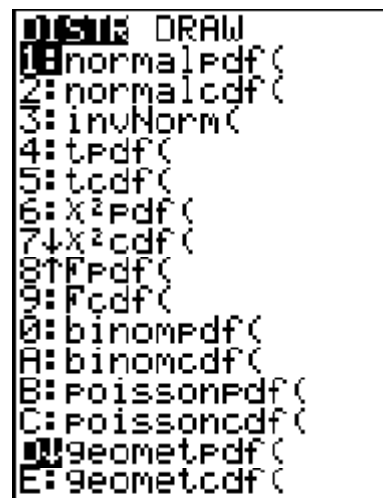
$\boxed{2nd}$ \boxed{VAR} .

Die Funktionen mit Nummern größer als 7 werden durch Rollen mit den Pfeiltasten erreicht; man kann aber auch unmittelbar die zugehörige Funktionsnummer eingeben.

Beispiele für den Einsatz der Funktionen \emptyset : binompdf und A : binomcdf für die Binomialverteilung sowie 1 : normalpdf und 2 : normalcdf für die Normalverteilung werden ausführlich in den Kapiteln 2 bis 4 behandelt (Rechnen mit der Binomialverteilung; Binomialverteilung – Erwartungswert und Standardabweichung; Signifikanztests).

Andere Verteilungen werden hier nicht behandelt, obwohl sie im Lehrplan für Baden-Württemberg als Thema für selbstorganisiertes Lernen genannt sind. Es bietet sich aber an, Schülern Referate oder Themen für andere Lernleistungen aus diesem Bereich zu geben¹.

Es folgt ein Beispiel zum Einsatz der Funktion invNorm :



¹ Viele Aspekte, Beispiele, Projekte und Aufgaben zum Thema „Wahrscheinlichkeitsverteilungen“, insbesondere zum selbstorganisierten Lernen, finden sich im „Lambacher-Schweizer“ Stochastik (Neuausgabe 2002), Klett Verlag, ISBN 3-12-732430-8.

In einer Bevölkerung ist die Körpergröße normal verteilt mit den Parametern Erwartungswert $\mu = 173$ cm und Standardabweichung $\sigma = 8$ cm.

- Wie groß sind 75% Prozent der Bevölkerung maximal?
- In welchem Bereich um den Erwartungswert liegen die Körpergrößen von 60% der Bevölkerung?

Die Lösungen ergeben sich wie nebenstehend abgebildet.

- Es sind 75% der Bevölkerung maximal etwa 178 cm groß.
- 60% der Bevölkerung haben eine Körpergröße zwischen etwa 166 cm und 179 cm.

```
invNorm(.75,173,
8)
178.3959
(invNorm(.8,173,
8),invNorm(.2,17
3,8))
(179.7330 166.2...
```

IV Statistische Tests

Der TI-83 Plus bietet die Möglichkeit, eine Fülle von statistischen Tests mit dem Rechner durchzuführen.

Funktionen für statistische Test finden sich im STAT-TESTS - Menü; es wird aufgerufen mit

STAT .

Die Behandlung dieser Tests geht i.a. über den Lehrplan von Baden-Württemberg hinaus, da dort nur das Testen von einfachen Hypothesen verständlich gemacht werden soll.

Es wird jedoch besonders an dieser Stelle offenbar, dass der Rechner auch über die Schulzeit hinaus in vielen Studiengängen und Anwendungsbereichen nützlich sein kann, denn statistische Tests werden dort sehr oft eingesetzt.

Als Beispiel wird in Kapitel 4 gezeigt, wie man den Test 1-PropZTest beim Testen von Hypothesen einsetzen kann.

```
EDIT CALC TESTS
1:Z-Test...
2:T-Test...
3:2-SampZTest...
4:2-SampTTest...
5:1-PropZTest...
6:2-PropZTest...
7:ZInterval...
8:TInterval...
9:2-SampZInt...
0:2-SampTInt...
A:1-PropZInt...
B:2-PropZInt...
C:χ²-Test...
D:2-SampFTest...
E:LinRegTTest...
F:ANOVA(
```

2 Rechnen mit der Binomialverteilung

Das Rechnen mit der Binomialverteilung sowie die Darstellung von Diagrammen lässt sich mit dem TI-83 Plus auf einfache Weise vornehmen.

Beim ersten Lesen können die Abschnitte III und IV übergangen werden, da sie nur alternative Möglichkeiten für die grafische Darstellung von Binomialverteilungen behandeln.

I Werte der Binomialverteilung

Die Zufallsvariable X beschreibe die Zahl der Treffer bei einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p . Dann gilt die Bernoulliformel

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Die Werte der Verteilung sollen mit dem TI-83 berechnet werden.

Der TI-83 hat dazu eine passende Funktion eingebaut; sie wird vom Rechenfenster folgendermaßen aufgerufen:

2nd **VARS** [DISTR]

0 binompdf(

binompdf steht für binomial probability distribution function.

Die Funktion wird in das Rechenfenster übernommen.

Dann sind drei Parameter mit Kommata abgetrennt einzugeben:

n , die Länge der Bernoullikette,

p , die Trefferwahrscheinlichkeit,

k , die gewünschte Stelle für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit.

Im Beispiel sind $n=20$, $p=0.3$, $k=8$ eingegeben:

20 **,** 0.3 **,** 8 **)** **ENTER**

Ergebnis: $P(X=8) = 0.1144$ (auf vier Dezimalstellen gerundet)

Man kann auch alle Werte der Verteilung als Liste ausgeben, indem man den dritten Parameter weglässt:

2nd **VARS** **0** 20 **,** 0.3 **)** **ENTER**

Durch die Liste kann man mit den Pfeiltasten **◀▶** rollen.

Auch die entsprechende Summenfunktion `binomcdf` ist eingebaut (c steht für cumulation). Sie wird auf die gleiche Weise wie die Funktion `binompdf` gehandhabt.

2nd **VARS** [DISTR]

ALPHA **A** binomcdf(

Ergebnis: $P(X \leq 8) = 0.8867$ (auf vier Dezimalstellen gerundet).

Mit diesen beiden Funktionen können viele Aufgaben bearbeitet werden, für die man bislang Werte aus Tabellen nachschlagen musste. Die Zeit für die Behandlung solcher Aufgaben wird dadurch deutlich verkürzt. Man kann sich daher einen ausführlichen Zugang zu den Begriffen Erwartungswert und Standardabweichung leisten, wie er in Kapitel 3 vorgeschlagen ist.

```

0: 2nd DRAW
1: 5:tcdf(
2: 6:X²Pdf(
3: 7:X²cdf(
4: 8:Fpdf(
5: 9:Fcdf(
6: 20:binompdf(
7: A+binomcdf(

```

```

binompdf(20,0.3,
8)
.1144

```

```

binompdf(20,0.3,
8)
.1144
binompdf(20,0.3)
... .0068 .0278 ...

```

```

binompdf(20,0.3,
8)
.1144
binomcdf(20,0.3,
8)
.8867

```

II Diagramm und Tabelle der Binomialverteilung

Die Binomialverteilung kann auf einfache Weise als Treppendiagramm dargestellt werden. Es ist ggf. der Function-Modus einzustellen (\square **MODE** Func). Als Beispiel werden die Parameter $n = 20$ und $p = 0,3$ verwendet.

Die Funktion `binomcdf` wird mit den zugehörigen Parametern und variablem X in den $\boxed{Y=}$ -Editor eingegeben.

- \square $\boxed{Y=}$
- \square $\boxed{2nd}$ \boxed{VARS} $\boxed{0}$ `binompdf(`
- \square $\boxed{20}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0.3}$ $\boxed{,}$ \boxed{MATH} $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{2}$ $\boxed{X,T,\theta,n}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{)}$ $\boxed{)}$

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=binompdf(20,
0.3,round(X,0))
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=

```

Die `round`-Funktion aus dem **MATH**-NUM-Menu wird verwendet, damit der dritte Parameter der `binompdf`-Funktion ganzzahlig ist. Vor dem Zeichnen wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

- \square **WINDOW**

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

```

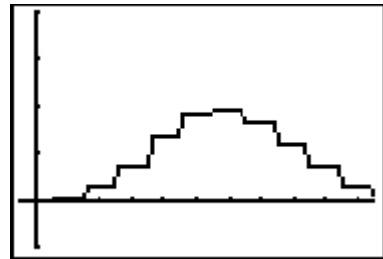
WINDOW
Xmin=-.5
Xmax=10.5
Xscl=1
Ymin=-.1
Ymax=.4
Yscl=.1
Xres=1

```

Das Diagramm wird gezeichnet:

- \square **GRAPH**

Man kann hier bemerken, dass die Fläche „unter dem Diagramm“ den Inhalt 1 hat, da sie der Summe aller Wahrscheinlichkeiten einer Verteilung entspricht.



Will man die „Stufen“ vermeiden, so kann man im Editor vor der Funktion die Einstellung „punktiert“ wählen:

- \square $\boxed{Y=}$
- \square $\boxed{\leftarrow}$ $\boxed{\leftarrow}$ \boxed{ENTER} \boxed{ENTER} \boxed{ENTER} \boxed{ENTER} \boxed{ENTER} \boxed{ENTER}

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=binompdf(20,
0.3,round(X,0))
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=

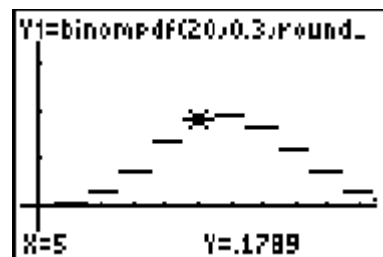
```

Es ergibt sich dann folgendes Diagramm:

- \square **GRAPH**

Im **TRACE**-Modus kann man sich mithilfe der Pfeiltasten durch den Graph bewegen und Werte der Verteilung ablesen. Alternativ kann man k -Werte über die Tastatur eingeben und ablesen:

- \square **TRACE** $\boxed{5}$ \boxed{ENTER}



Um eine Wertetabelle zu erhalten, wählt man zunächst

- \square $\boxed{2nd}$ \boxed{WINDOW} $\boxed{[TBLSET]}$

und gibt die Werte der Abbildung in dem Einstellungsfenster ein.

```

TABLE SETUP
TblStart=0
ΔTbl=1
Indent:  Ask
Depend:  Ask

```

Dann wird das Tabellenfenster aufgerufen:

2nd **GRAPH** [TABLE]

Durch das Fenster kann man beliebig rollen.

X	Y1
0.0000	8.0E-4
1.0000	.0068
2.0000	.0278
3.0000	.0716
4.0000	.1304
5.0000	.1789
6.0000	.1916

X=0

Es wird empfohlen, beim ersten Lesen mit Kapitel 3 fortzufahren, da in den Abschnitten III und IV nur Varianten der Darstellung von Binomialverteilungen behandelt werden.

III Darstellung der Binomialverteilung als Folge

Die folgende Vorgehensweise ist eine Variante zu der in Abschnitt II beschriebenen Methode.

Dazu wird der Folgenmodus eingestellt:

MODE Seq

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```

Mithilfe der Funktion `binompdf` wird der Funktionsterm für die Folge eingegeben:

Y=

2nd **VARS** [0] `binompdf(`

20 [,] 0.3 [,] **X,T,θ,n** [)]

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)binompdf(2
0,0.3,n)
u(nMin)
u(n)=
v(nMin)=
v(n)=
```

Nun kann die Folge grafisch dargestellt werden. Zuvor wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

WINDOW

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

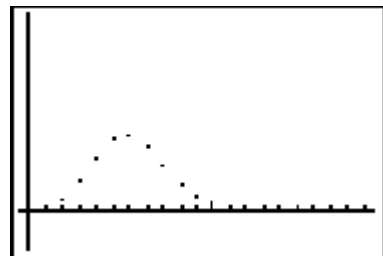
Vor dem Zeichnen sind gegebenenfalls alle aktiven Funktionen sowie Plots im **Y=**-Fenster zu deaktivieren.

```
WINDOW
nMin=0
nMax=20
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=-.5
Xmax=20.5
Xscl=1
Ymin=-.1
Ymax=.5
Yscl=1
```

Es ergibt sich dann folgendes Diagramm:

GRAPH

Leider werden in der Grundeinstellung die Daten nur als kleine Punkte sichtbar.



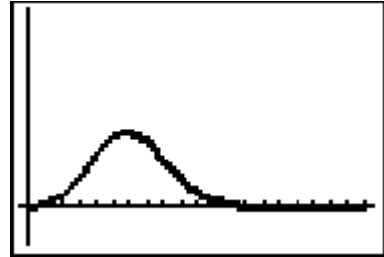
Man kann aber im $\boxed{Y=}$ -Editor einen anderen Zeichenstil wählen. Dazu bewegt man den Cursor links neben $u(n)$ und drückt mehrfach die $\boxed{\text{ENTER}}$ -Taste, bis der gewünschte Stil erscheint. Hier wurde „dick, durchgezogen“ als Stil ausgewählt.

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n) binompdf(20,0.3,n)
u(nMin)
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
```

Mit dem eingestellten Zeichenstil ergibt sich dann folgendes Diagramm:

$\boxed{\text{GRAPH}}$

Allerdings sind die Auswahlmöglichkeiten für Zeichenstile im Seq -Modus nicht sehr groß.



IV Darstellung der Binomialverteilung mithilfe von Listen

Die folgende Vorgehensweise ist eine Variante zu der in Abschnitt III beschriebenen Methode mit erweiterten Darstellungsmöglichkeiten. Dazu wird zunächst eine Liste erzeugt, welche die Werte der Binomialverteilung enthält.

Diese Liste wird im Rechenfenster erzeugt mit dem Befehl `binompdf`:

$\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{VARS}} \quad [\text{DISTR}]$
 $\boxed{0} \quad \text{binompdf}(\quad$

```
DISTR DRAW
5:ftcdf(
6:X²Pdf(
7:X²cdf(
8:Fpdf(
9:Fcdf(
20:binompdf(
A:binomcdf(
```

Dann sind zwei Parameter mit Kommata abgetrennt einzugeben: n , die Länge der Bernoullikette, p , die Trefferwahrscheinlichkeit.

Im Beispiel sind wie oben $n=20$ und $p=0.3$ eingegeben; außerdem wird die ausgegebene Liste als L_2 gespeichert:

$20 \boxed{,} 0.3 \boxed{)} \boxed{\text{STO}} \boxed{2} \boxed{\text{ENTER}}$

```
binompdf(20,0.3)
→L2
(7.979E-4 .007 ...
█
```

Als Liste L_1 wird nun eine Liste erzeugt, welche die möglichen Trefferzahlen enthält, im Beispiel also von 0 bis 20. Das wird im Rechenfenster folgendermaßen vorgenommen:

$\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{MODE}} \quad [\text{QUIT}]$
 $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{STAT}} \boxed{\blacktriangleright} \quad [\text{List Ops}]$
 $\boxed{5} \boxed{X,T,θ,n} \boxed{,} \boxed{X,T,θ,n} \boxed{,} 0 \boxed{,} 20 \boxed{)} \boxed{\text{STO}} \boxed{2\text{nd}} \boxed{1} \boxed{\text{ENTER}}$

```
seq(n,n,0,20)→L1
{0 1 2 3 4 5 6 ...
█
```

Die Liste wird mit dem `seq`-Befehl erzeugt, der als ersten Parameter das Bildungsgesetz der Folge, als zweiten Parameter die Folgenvariable und dann die Grenzen (von ... bis) erwartet².

Die erzeugte Liste wird als L_1 gespeichert.

² Die „Chamäleon“-Taste $\boxed{X,T,θ,n}$ liefert im Modus Func die Ausgabe X , im (hier eingestellten) Modus Seq dagegen die Ausgabe n .

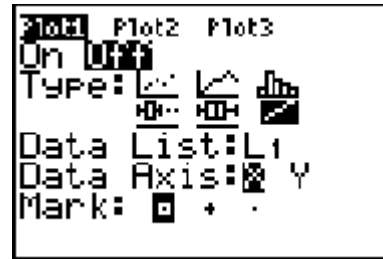
Das Diagramm soll als Plot1 dargestellt werden:

2nd **Y=** **1**

Plot1 wird eingeschaltet, indem der Cursor auf On bewegt und

ENTER

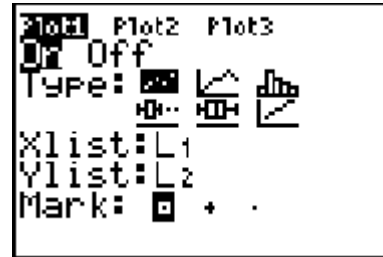
einggegeben wird.



Als Plot-Typ wird der erste Typ (Punktdarstellung) ausgewählt, indem der Cursor dorthin bewegt wird und

ENTER

einggegeben wird. Als $Xlist$ wird die Liste L_1 gewählt, als $Ylist$ wird die Liste L_2 gewählt, nachdem der Cursor jeweils an die entsprechende Stelle bewegt wurde. Als Markierung wird das kleine Quadrat durch Eingabe von **ENTER** ausgewählt.



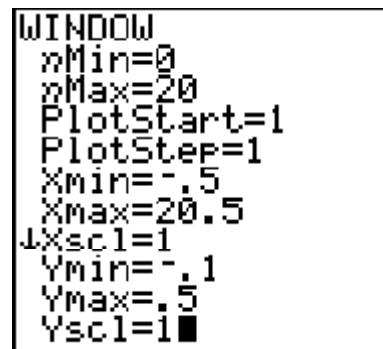
Nun kann der Plot grafisch dargestellt werden. Zuvor wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

WINDOW

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

Vor dem Zeichnen sind gegebenenfalls alle aktiven Funktionen im

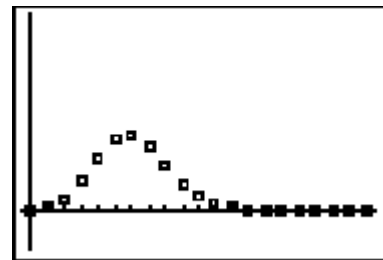
Y=-Fenster zu deaktivieren.



Der Listenplot wird nun mit

GRAPH

dargestellt.



Ein Vorteil dieser Methode besteht darin, dass man neben dem Listenplot leicht weitere Funktionen einfügen kann, z.B. eine Kurve, die möglichst gut durch den Plot hindurchläuft (siehe Kapitel 6).

3 Binomialverteilung – Erwartungswert und Standardabweichung

Die folgende Einführung der Begriffe Erwartungswert und Standardabweichung ist eine Alternative zur üblichen Einführung. Formale Berechnungen werden vermieden. Es wird experimentell begründet, dass Binomialverteilungen sich mit Hilfe der Gaußschen Glocke annähern lassen. Es geht vor allem um das intuitive Erfassen dieses mathematisch bedeutungsvollen Zusammenhangs. Dabei kann in der Schule keine mathematisch exakte Herleitung erbracht werden, trotzdem sind auf der propädeutischen Ebene wertvolle Einsichten möglich. Das erfordert teilweise Plausibilitätsbetrachtungen, die nicht mathematisch exakt begründet werden, weil die Mittel dazu fehlen.

I Variation der Parameter

Es geht zunächst um die Erfassung von qualitativen Eigenschaften der Binomialverteilung. Dabei dürfen bewusst unscharfe Begriffe ins Spiel gebracht werden wie „Glockenform“, „flach“, „schmal“.

a) Abhängigkeit von n

Es wird untersucht, wie sich die Diagramme der Binomialverteilung ändern, wenn man n variiert und p festhält. Man kann die Untersuchung in Gruppen durchführen (verschiedene Werte von p).

Dazu gibt man bei $p=0.5$ z.B. die Diagramme für die Werte $n = 10$; 20 ; 40 ; 80 aus. Die Eingabe der Funktionen erfolgt wie in Kapitel 2 beschrieben.

Im **WINDOW**-Fenster wird $X_{max}=60$ gesetzt, damit alle Diagramme Platz haben.

Aus den Diagrammen lässt sich ohne weiteres ablesen:

1. Die Diagramme haben Glockenform.
2. Die Diagramme wandern mit wachsendem n immer weiter nach rechts.
3. Die Diagramme werden mit wachsendem n immer flacher und breiter.

Ähnliche Ergebnisse erhält man für andere Werte von p.

```

Plot1 Plot2 Plot3
0.5,round(X,0))
\Y2▣binompdf(20,
0.5,round(X,0))
\Y3▣binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y4▣binompdf(80,
0.5,round(X,0))
  
```



b) Abhängigkeit von p

Es wird untersucht, wie sich die Diagramme der Binomialverteilung ändern, wenn man p variiert und n festhält. Man kann die Untersuchung in Gruppen durchführen (verschiedene Werte von n).

Dazu gibt man bei $n=40$ z.B. die Diagramme für die Werte $p = 0.1$; 0.3 ; 0.5 ; 0.7 ; 0.9 aus.

Die Eingabe der Funktionen erfolgt wie in Kapitel 2 beschrieben.

Im **WINDOW**-Fenster wird $X_{max}=40$ gesetzt, damit alle Diagramme Platz haben.

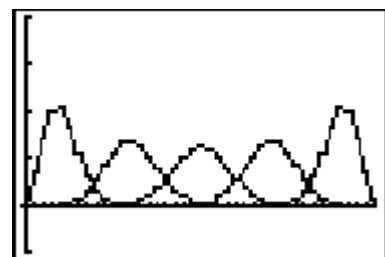
Aus den Diagrammen lässt sich ohne weiteres ablesen:

1. Die Diagramme haben Glockenform.
2. Die Diagramme werden für $p \rightarrow 1$ und $p \rightarrow 0$ immer höher und schmaler.
3. Für $p \rightarrow 1$ und $p \rightarrow 0$ ergibt sich eine leicht anwachsende Asymmetrie.

Ähnliche Ergebnisse erhält man für andere Werte von n.

```

Plot1 Plot2 Plot3
0.3,round(X,0))
\Y3▣binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y4▣binompdf(40,
0.7,round(X,0))
\Y5▣binompdf(40,
0.9,round(X,0))
  
```



c) Weitere Eigenschaften

Aus den vorhergehenden Untersuchungen und ggf. weiteren Parametervariationen erkennt man:

1. Nur relativ wenige Werte nahe beim „Zentrum“ sind deutlich größer als Null. Sie bestimmen die „Breite“ der Glocken
2. Die Flächen unter den Glocken haben jeweils den Inhalt 1, denn sie sind die Summen aller Werte der Binomialverteilung (Rechtecke der Breite 1, vgl. S.8).

II Die Gauß-Glocke als Ausgangskurve

Da alle Diagramme Glockenform haben, liegt es nahe, nach einer „Basisglocke“ zu suchen, aus der sich alle anderen geometrisch und rechnerisch erzeugen lassen.

Man teilt den Schülern mit, dass als erster der Mathematiker Gauß („10-Mark-Schein“) eine passende Funktion gefunden hat, die „Gauß-Glocken-Funktion“.

Der TI-83 Plus hat diese Funktion eingebaut; sie wird folgendermaßen im $\boxed{Y=}$ -Editor eingegeben, hier als Funktion Y_6 :

$\boxed{Y=}$

$\boxed{2nd} \boxed{VARS} \boxed{1} \boxed{[DISTR]} \text{normalpdf(}$

$\boxed{X,T,\theta,n} \boxed{)}$

`normalpdf` steht für `normal probability distribution function`.

Vor dem Zeichnen wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

\boxed{WINDOW}

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

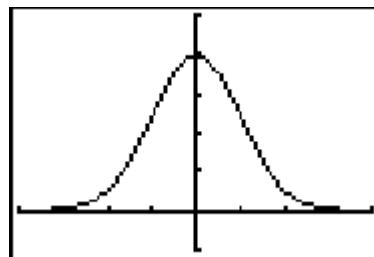
Vor dem Zeichnen sind gegebenenfalls alle anderen aktiven Funktionen im $\boxed{Y=}$ -Fenster zu deaktivieren.

Die Gauß-Glocke wird gezeichnet mit

\boxed{GRAPH} .

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y3=binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y4=binompdf(40,
0.7,round(X,0))
\Y5=binompdf(40,
0.9,round(X,0))
\Y6=normalpdf(X)
```

```
WINDOW
Xmin=-4
Xmax=4
Xscl=1
Ymin=-.1
Ymax=.5
Yscl=.1
Xres=1
```



Da die Gaußfunktion im Rechner implementiert ist, kann auf die Angabe ihrer Gleichung

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ verzichtet werden. Eventuell kann aber in JG 13 bei der Behandlung der

e-Funktion darauf verwiesen werden, insbesondere kann sich daraus ein Schülerreferat ergeben.

Eine Funktionsuntersuchung im Grafikfenster macht folgende Eigenschaften plausibel:

1. Die Gaußglocke ist symmetrisch zur y-Achse.
2. Ihr größter Wert bei $x = 0$ ist $y \approx 0,399$.
3. Für $|x| > 5$ sind die Funktionswerte praktisch Null.
4. Die Fläche unter der Kurve hat den Inhalt 1.

Zur Bestimmung der letzten Eigenschaft ist im Rechner die Funktion `normalcdf` implementiert, die man im $\boxed{[DISTR]}$ -Menu mit

$\boxed{2nd} \boxed{VARS} \boxed{2}$ aufruft. Die Flächenberechnung erfolgt einfach durch Eingabe von unterer und oberer Grenze, siehe Abbildung. Wegen Eigenschaft 3 kann man als Grenzen -5 und 5 nehmen.

```
normalcdf(-5,5)
1.0000
```

III Anpassen der Gauß-Glocke – Erwartungswert und Abweichungsfaktor

Die Gauß-Glocke soll durch geometrische Operationen näherungsweise möglichst gut in eine vorgegebene „Binomialglocke“, z.B. mit $n=40$ und $p=0.5$, überführt werden. Das lässt sich erreichen durch

- eine Verschiebung in Richtung der x-Achse, anschließend
- eine Stauchung in Richtung der y-Achse, anschließend
- eine Streckung in Richtung der x-Achse.

Bei diesen geometrischen Operationen kommen zwei Parameter ins Spiel, welche näherungsweise die Bedeutung von Erwartungswert und Standardabweichung der binomial verteilten Zufallsvariable X haben.

Die folgende Darstellung ist aus Gründen der Übersichtlichkeit kompakt gehalten. Die Ergebnisse können aber durchweg experimentell von den Schülerinnen und Schülern ermittelt werden.

Zu a) Das Maximum der Gaußglocke wird nach rechts um μ zum Maximum der Binomialglocke verschoben. Der Wert für μ lässt sich auch ohne Rechnung als am wahrscheinlichsten zu erwartender Wert erklären, für den die Schülerinnen und Schüler intuitiv den Wert $n \cdot p$ nennen. Das führt zu der

Definition: Das Produkt $\mu = n \cdot p$ heißt Erwartungswert von X .

Das Schaubild G einer Funktion mit Funktionsterm $g(x)$ wird um μ nach rechts verschoben zum Schaubild G' . Dann hat G' den Funktionsterm $g(x-\mu)$.

Bei der Funktion Y_5 ist die Binomialverteilung mit $n=40$ und $p=0.5$ und bei der Funktion Y_6 die Gaußfunktion mit Argument $x-\mu$ eingegeben. Dabei ist $\mu = n \cdot p = 20$.

Alle anderen Funktionen sind deaktiviert.

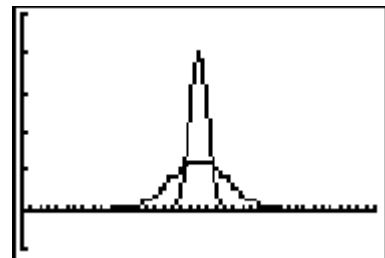
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y4=binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y5=binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y6=normalpdf(X-
20)
\Y7=
  
```

Die Abbildung zeigt das Ergebnis der Verschiebung.

Die Maximalstellen der Binomialglocke und der verschobenen Gaußglocke stimmen überein, die Funktionswerte $g(0)$ bzw. $P(X=\mu)$ sind unterschiedlich.

Die Höhe der verschobenen Gaußglocke wird nun an die Höhe Binomialglocke durch eine Stauchung in y-Richtung angepasst.



Als Stauchfaktor in y-Achsenrichtung kann das Höhenverhältnis

$\frac{g(0)}{P(X=\mu)}$ verwendet werden, das als Variable S abgespeichert

wird:

[2nd] [VARS] [1] 0 [)] [÷] [2nd] [VARS] [0] 40 [,] 0.5 [,] 20 [)]

[STO] [ALPHA] S [ENTER]

```

normalpdf(0)/bin
ompdf(40,0.5,20)
→S
3.1821
  
```

Die Funktion Y_6 (verschobene Gaußglocke) wird dann im $\boxed{Y=}$ -Editor mit dem Stauchfaktor $1/S$ multipliziert.

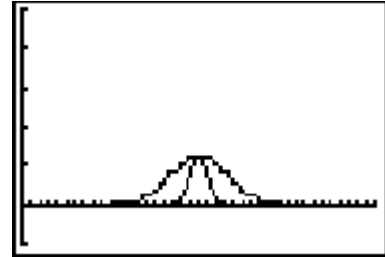
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y4=binompdf(40,
0.7,round(X,0))
\Y5=binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y6=1/S*normalpdf
f(X-20)
\Y7=
    
```

Die verschobene und gestauchte Funktion wird zusammen mit der Binomialglocke gezeichnet:

GRAPH

Man sieht, dass nun die Maxima übereinstimmen. Die Fläche der verschobenen und gestauchten Gaußglocke ist aber auch um den Faktor $1/S$ verkleinert worden.



Um die Breite der transformierten Gaußglocke anzupassen und den Flächeninhalt wieder auf den Wert 1 zu bekommen, muss noch mit dem Faktor S in Richtung der x -Achse gestreckt werden. Das wird erreicht, indem das Argument der verschobenen und gestauchten Gaußfunktion Y_6 im $\boxed{Y=}$ -Editor durch S dividiert wird. Y_6 hat dann folgende

```

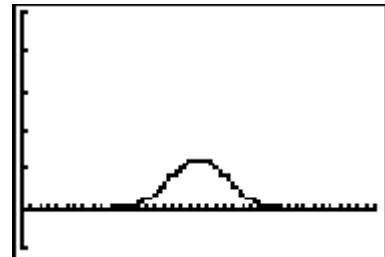
Plot1 Plot2 Plot3
0.5,round(X,0))
\Y4=binompdf(40,
0.7,round(X,0))
\Y5=binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y6=1/S*normalpdf
f((X-20)/S)
    
```

Gleichung:
$$y_6(x) = \frac{1}{S} \cdot g\left(\frac{x-\mu}{S}\right).$$

Die verschobene, gestauchte und gestreckte Funktion wird gezeichnet:

GRAPH

Man sieht, dass sie nun mit der Binomialglocke fast übereinstimmt. Auf diese Weise lässt sich jede Binomialglocke durch eine verschobene, gestauchte und gestreckte Gaußglocke annähern.



Der Parameter S ist auch ein Maß für die Breite der Binomialglocke bzw. dafür, wie stark Werte von X , deren Wahrscheinlichkeit deutlich größer als Null ist, vom Erwartungswert abweichen.

Definition: S wird Abweichungsfaktor genannt.

IV Standardabweichung

Der Zusammenhang zwischen den Parametern der Binomialverteilung und der Glockenhöhe bzw. -breite steckt im Abweichungsfaktor S . Es wird nun experimentell gezeigt, dass der Abweichungsfaktor S sich annähern lässt durch $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

Dazu kann man in Gruppen für verschiedene Werte von p untersuchen, wie sich S in Abhängigkeit von n verhält. Hier wird zunächst der Fall $p=0.5$ untersucht.

Man definiert S im $\boxed{Y=}$ -Editor als Funktion Y_7 von n :

2nd **VARS** **1** **0** **)** **÷** **2nd** **VARS** **0** **[X,T,θ,n]** **,** **0.5** **,** **0.5** **[X,T,θ,n]** **)**

Alle anderen Funktionen werden deaktiviert.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y5=binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y6=1/S*normalpdf
f((X-20)/S)
\Y7=normalpdf(0)
/binompdf(X,0.5,
0.5X)
    
```

Startwert und Schrittweite für die Wertetabelle werden im TBLSET-Editor auf jeweils 10 eingestellt, siehe Abbildung:

[2nd] [WINDOW] [TBLSET]

TABLE SETUP		
TblStart=	10	
ΔTbl=	10	
Indent:	Auto	Ask
Depend:	Auto	Ask

Es ergibt sich folgende Wertetabelle:

[2nd] [GRAPH] [TABLE]

Es fällt auf, dass der Wert 1.6 zu x=10 bei x=40 in etwa verdoppelt (3.2) und bei x=90 verdreifacht (4.8) erscheint.

Weitere Untersuchungen dieser Art deuten auf die Vermutung hin, dass näherungsweise $S \sim \sqrt{n}$ ist.

X	Y7	
10.0000	1.6211	
20.0000	2.2642	
30.0000	2.7615	
40.0000	3.1821	
50.0000	3.5533	
60.0000	3.8892	
70.0000	4.1983	
80.0000	4.4861	
90.0000	4.7566	
100.00	5.0125	
110.00	5.2560	
120.00	5.4886	
130.00	5.7119	
140.000	5.9267	

Deutlicher wird das, indem man S^2 in Abhängigkeit von n betrachtet, wie in der nebenstehenden Tabelle ($Y_7 = S^2$).

Es gilt näherungsweise $S^2 \sim n$.

X	Y7	
10.0000	2.6280	
20.0000	5.1265	
30.0000	7.6260	
40.0000	10.126	
50.0000	12.626	
60.0000	15.126	
70.0000	17.625	

X=10

Um den Proportionalitätsfaktor bei $S \sim \sqrt{n}$ zu ermitteln, wird im nächsten Schritt im [Y=]-Editor die Funktion Y_7 abgeändert zu $\frac{S}{\sqrt{n}}$, siehe Abbildung.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y6=binompdf(40,
0.5,round(X,0))
\Y6=1/5*normalpdf
f((X-20)/5)
\Y7=normalpdf(0)
/binompdf(X,0.5,
0.5X)/sqrt(X)
    
```

Aus den Tabellenwerten (siehe Ausschnitt) folgt in guter Näherung $S = 0,5 \cdot \sqrt{n}$ bzw. $S^2 = 0,25 \cdot n$.

X	Y7	
220.00	.5006	
230.00	.5005	
240.00	.5005	
250.00	.5005	
260.00	.5005	
270.00	.5005	
280.000	.5004	

X=280

Nun wird noch die Abhängigkeit von p untersucht. Da die Abhängigkeit von n bei S^2 einfacher zu erkennen war, ist es naheliegend auch die Abhängigkeit von p bei S^2 zu untersuchen.

Um die Abhängigkeit von n zu eliminieren, werden die Werte für S^2/n bei festem n=1000 und variablem p berechnet. Dazu wird im [Y=]-Editor die Funktion Y_7 abgeändert wie in der Abbildung.

```

Plot1 Plot2 Plot3
0.5,round(X,0))
\Y6=1/5*normalpdf
f((X-20)/5)
\Y7=(normalpdf(0)
)/binompdf(1000,
X,1000X))/1000
\Y8=
    
```

Bei [TBLSET] wird als Startwert 0.1 und als Schrittweite ebenfalls 0.1 eingestellt.

Es ergibt sich nebenstehende Wertetabelle.

Bei Y_8 ist noch die Funktion Y_7/p ergänzt. Offenbar ist $1-p$ eine gute Näherung für Y_8 , also gilt $Y_7 \approx p(1-p)$.

Daher lässt sich S^2 gut annähern durch $n \cdot p \cdot (1-p)$.

Dadurch wird folgende Definition motiviert:

$V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ heißt Varianz und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ heißt Standardabweichung von X .

Die experimentelle Methode hat also sehr gute Näherungswerte für Varianz und Standardabweichung geliefert. Es wird daher σ statt S verwendet.

X	Y7	Y8
.1000	.0902	.9015
.2000	.1601	.8007
.3000	.2101	.7004
.4000	.2401	.6003
.5000	.2501	.5003
.6000	.2401	.4002
.7000	.2101	.3002
ΣX = .1		

4 Testen von Hypothesen

Bei Hypothesentests kommt es darauf an, auf der Basis einer Stichprobe eine Entscheidung für oder gegen eine Hypothese zu treffen. Dabei wird ein Annahmebereich für die betreffende Hypothese bestimmt. Liegt das Stichprobenergebnis im Annahmebereich, so wird die Hypothese angenommen, sonst wird sie abgelehnt.

Die Bestimmung des Annahmebereichs kann man bei vielen Verteilungen am einfachsten mithilfe der Wahrscheinlichkeiten für σ - Intervalle vorgenommen werden. σ - Intervalle sind Umgebungen des Erwartungswertes der Form $[\mu - c \sigma ; \mu + c \sigma]$. Es sei daran erinnert, dass die Standardabweichung σ ein Maß für die „Breite“ der Binomialglocke ist (siehe Kapitel 3).

Dieses Vorgehen vermeidet weitgehend technische Schwierigkeiten und ermöglicht so einen freien Blick auf das Wesentliche von Signifikanztests.

I σ - Intervalle bei Binomialverteilungen

Die Standardabweichung σ ist ein Maß für die „Breite“ einer Binomialverteilung. Um dafür einen quantitativen Zusammenhang anzugeben, kann man der Frage nachgehen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Werte der Binomialverteilung im Bereich $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ liegen, d.h. wie groß $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(X \leq \mu + \sigma) - P(X \leq \mu - \sigma)$ für eine binomial verteilte Zufallsvariable X ist.

Eine entsprechende Untersuchung lässt sich mit dem Rechner gut in Gruppen durchführen. Die Gruppen bestimmen jeweils für einen Wert von p eine Folge von Werten $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ in Abhängigkeit von n .

Dazu wird dieser Wert als Funktion Y_1 berechnet, siehe Abbildung. Für $p=0,5$ ergibt sich dabei $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{n \cdot 0,25}$.

Damit ergeben sich z.B. für n in 50er-Schritten folgende Tabellen.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=binomcdf(X,0
.5,X*0.5+sqrt(X*0.2
5))-binomcdf(X,0
.5,X*0.5-sqrt(X*0.2
5)
\Y2=
\Y3=
    
```

p=0,1	
X	Yg
500000	.7661
100.00	.6701
150.00	.6599
200.00	.7120
250.00	.6577
300.00	.7107
350.00	.6733
X=50	

p=0,3	
X	Yg
500000	.7204
100.00	.6740
150.00	.6730
200.00	.6842
250.00	.6995
300.00	.6553
350.00	.6786
X=50	

P=0,5	
X	Yg
500000	.6778
100.00	.6803
150.00	.7115
200.00	.7112
250.00	.6572
300.00	.6736
350.00	.6902
X=50	

Alle Werte liegen nahe bei 0,7. Eine Mittelwertberechnung ergibt etwa 0,69. Also kann man sagen dass etwa 69% der Werte bei der Binomialverteilung im Bereich $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ liegen.

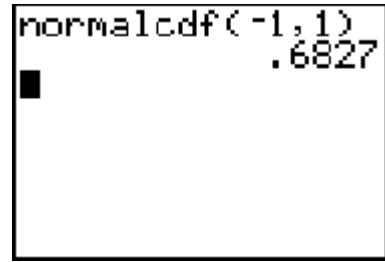
Das ist kein Zufall, wie man folgendermaßen begründen kann. In Abschnitt III von Kapitel 3 wird gezeigt, dass die Gaußglocke sich durch Verkettung von drei geometrischen Operationen - Verschieben um μ , Stauchen in Richtung der y-Achse um σ und Strecken in Richtung der x-Achse um σ - näherungsweise auf die „Binomialglocke“ abbilden lässt. Dabei bleibt die Fläche unter der Kurve erhalten. Natürlich bleibt dabei auch jede Teilfläche erhalten. Daher lässt sich auch die Wahrscheinlichkeit für den Bereich $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ als Fläche deuten. Dieser Fläche entspricht wegen der geometrischen Operationen bei der ursprünglichen Gaußglocke die Fläche unter der Gaußglocke im Bereich $[-1;1]$. Zur Berechnung ihres Inhalts stellt der Rechner die Funktion `normalcdf` zur Verfügung.

Die Funktion `normalcdf` wird aus dem Rechenfenster im [DISTR]-Menu mit

`2nd` `VARS` `2`

aufgerufen. Die Berechnung erfolgt einfach durch Eingabe von unterer und oberer Grenze, siehe Abbildung.

Der oben ermittelte Wert stimmt gut mit dem hier berechneten Wert überein.

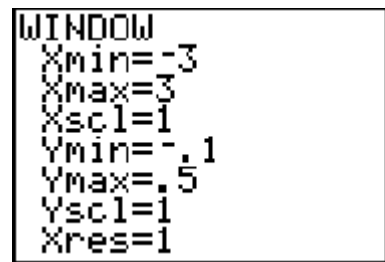
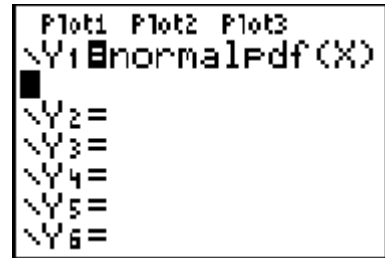


Alternativ kann man die Berechnung auch im Grafikfenster vornehmen. Als Funktion wird die Gaußfunktion `normalpdf` im `Y=`-Fenster als Funktion `Y1` eingegeben, die man im [DISTR]-Menu mit

`2nd` `VARS` `1`

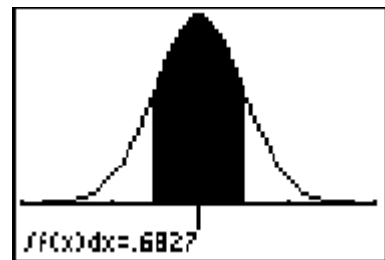
aufruft.

Der Zeichenbereich wird wie nebenstehend eingestellt.



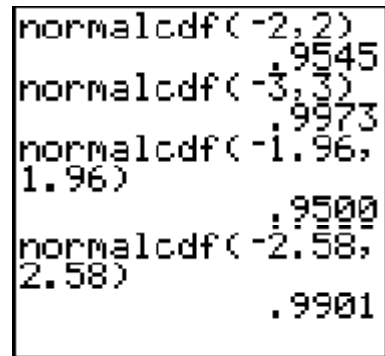
Der Flächeninhalt kann als Integral (`2nd` `TRACE` `7`) im Grafikfenster (Bereich -1 bis 1) berechnet werden.

Das Integral wird hier nur als Symbol für die Flächenberechnung mitgeteilt, auf die Begründung durch die Integralrechnung in JG 12 kann verwiesen werden.



So kann man auch für weitere σ -Intervalle der Form $[\mu - c\sigma ; \mu + c\sigma]$ die Wahrscheinlichkeiten berechnen. Man erhält durch Rückübertragung auf die Binomialverteilung:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,3\%$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,5\%$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$
- $P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 95\%$
- $P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 99\%$



Die Näherungen sind für die Praxis ausreichend, wenn σ mindestens den Wert 3 hat. Das trifft für praktisch alle Anwendungen zu.

Bei einem Signifikanztest (siehe Abschnitt II) interessieren auch die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Wert außerhalb eines σ -Intervalls liegt, also die Gegenwahrscheinlichkeiten der oben bestimmten. Man nennt sie dort auch Signifikanzniveau. Der Zusammenhang der oben verwendeten Parameter c für die σ -Intervalle $[\mu - c\sigma ; \mu + c\sigma]$ mit den zugehörigen Signifikanzniveaus ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Parameter c	1	2	3	1,96	2,58
Signifikanzniveau	31,7%	4,5%	0,3%	5%	1%

II Signifikanztests

Behauptungen wie die aus dem Zeitungsartikel finden sich häufig in unserem Alltag. Stimmen Sie wirklich? Eine Euro-Münze bleibt bei 250 Würfeln nur 109 mal auf „Zahl“ liegen. Folgt daraus, dass Euro-Münzen vorzugsweise mit der Seite „Kopf“ nach oben landen?

Mit Hilfe der Aussagen aus dem vorhergehenden Abschnitt lässt sich zumindest etwas über die Wahrscheinlichkeit aussagen, mit der ein solches Ergebnis rein zufällig eintreten kann, obwohl die Münze keine Seite bevorzugt. In diesem Falle liegt eine Bernoullikette der Länge $n=250$ mit $p=0,5$ vor. Mit $\mu=125$ und $\sigma=7,9$ ergibt sich wegen

$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 95\% \quad \text{bzw.} \\ P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 99\% :$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der „Zahl“-Würfe im Bereich $[109,5 ; 140,5]$ liegt, beträgt 95%.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der „Zahl“-Würfe im Bereich $[104,6 ; 145,4]$ liegt, beträgt 99%.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der „Zahl“-Würfe außerhalb dieser Bereiche liegt, beträgt also nur 5% bzw. 1%. In diesem Fall spricht man von einer Abweichung auf dem Signifikanzniveau 5% bzw. 1%.

Man sieht, dass die Ergebnisse des Tests aus dem Zeitungsartikel zwar recht unwahrscheinlich sind, aber keinesfalls deutlich für ein Ablehnen der Hypothese „Die Münze bevorzugt keine Seite“ sprechen.

Grundsätzlich ist mit einer Stichprobe nicht entscheidbar, ob eine Hypothese richtig oder falsch ist. Man kann aber auf der Basis von Wahrscheinlichkeiten eine Hypothese beibehalten oder verwerfen. Auf dieser Idee basieren Signifikanztests. Wenn wie im obigen Beispiel eine Stichprobe ein Ergebnis innerhalb eines σ -Intervalls liefert, behält man die Hypothese bei, sonst verwirft man sie. Das σ -Intervall heißt daher beim Testen von Hypothesen auch Annahmebereich.

Es liege eine binomial verteilte Zufallsvariable X zu Grunde, wie z.B. die Anzahl der „Zahl“-Würfe bei n Würfeln einer Euro-Münze. Dann wird ein Signifikanztest folgendermaßen durchgeführt:

Schritt 1: Aufstellen der Hypothesen $H_0: p=p_0$ (Nullhypothese) und $H_1: p \neq p_0$ (Gegenhypothese)

Schritt 2: Festlegen des Stichprobenumfangs n und des Signifikanzniveaus.

Schritt 3: Bestimmen des Annahmebereichs $A=[\mu - c\sigma ; \mu + c\sigma]$.

Schritt 4: Durchführen einer Stichprobe mit Ergebnis x .

Schritt 5: Entscheiden: H_0 wird beibehalten, wenn x in A liegt, sonst wird H_0 verworfen.

Danach wäre bei dem Euro-Münzwurf die Hypothese $H_0: p=0,5$ das Ergebnis $x=109$ auf dem 5%-Signifikanzniveau zu verwerfen, auf dem 1%-Signifikanzniveau aber beizubehalten.

Der beschriebene Weg ist für den Unterricht gut geeignet, da das Wesentliche eines Tests deutlich wird. Außerdem sind nur einfache Berechnungen nötig.

Der Test kann auf folgende Weise auch mit dem im Rechner implementierten Tests 1-PropZTest durchgeführt werden, der im Prinzip auf gleiche Art zum obigen Ergebnis führt. Insbesondere verwendet auch dieser Test Wahrscheinlichkeiten, die sich mithilfe der Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung ergeben. Schülerinnen und Schüler können also diesen Test nur verstehen, wenn zuvor auf diese Näherung eingegangen wird.

Skandalös: Euromünze zeigt häufiger Kopf als Zahl

Die Süddeutsche Zeitung hat es mit einem spektakulären Selbsttest ans Tageslicht gezerrt: Die deutschen Ein-Euro-Münzen versagen angeblich beim bewährten „Kopf-oder-Zahl-Spiel“. Von 250 Würfeln brachten bei den Bayern 141 das Ergebnis „Kopf“ und nur 109 mal schillerte die Zahl. Das kann doch nicht wahr sein, dachten wir, und wiederholten das Experiment – mit der gleichen erschreckenden Tendenz: 135 mal kam der Adler und 115 mal die Zahl. Nicht auszudenken, wie leicht sich mit diesem Wissen alle möglichen Spiele manipulieren lassen. Dumm wären Mannschaftskapitäne beim Fußball, wenn sie nicht stets beim Eurowurf vor dem Anpfiff auf den grimmig schauender Die Chance

Dieser Test wird vom Rechenfenster aus dem STAT-TESTS -Menü aufgerufen:

STAT \leftarrow 5

```

EDIT CALC TESTS
1: Z-Test...
2: T-Test...
3: 2-SampZTest...
4: 2-SampTTest...
5: 1-PropZTest...
6: 2-PropZTest...
7: ZInterval...
  
```

Die Daten werden für das obige Münzwurf-Beispiel wie nebenstehend eingegeben. Die Bezeichner p_0 , x , n entsprechen den oben verwendeten, statt p wird prop verwendet.

```

1-PropZTest
P0: .5
x: 109
n: 250
PROPF0 <P0 >P0
Calculate Draw
  
```

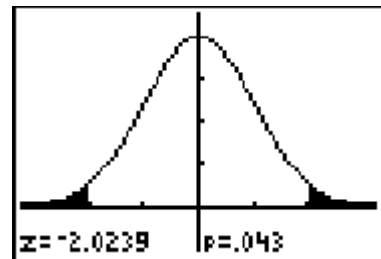
Die Auswahl von **Calculate** liefert dann die nebenstehende Ausgabe. Dabei gibt z an, um wie viele Standardabweichungen σ das Ergebnis x vom Erwartungswert μ abweicht, also $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

```

1-PropZTest
PROP# .5000
z = -2.0239
P = .0430
P# = .4360
n = 250.0000
  
```

\hat{p} ist die relative Häufigkeit für x : $\hat{p} = \frac{x}{n}$.

p gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Ergebnis um mindestens z Standardabweichungen vom Erwartungswert abweicht. Das wird durch die Grafik verdeutlicht, die sich bei Auswahl von **Draw** im Test (s.o.) ergibt. Dabei wird – wie oben – eine Normalverteilung mit den Parametern μ und σ zu Grunde gelegt.



Das Ergebnis $x=109$ ist also folgendermaßen zu interpretieren:

Ein solches Ergebnis oder eines mit noch größerer Abweichung vom Erwartungswert tritt nur mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit, nämlich etwa 4,3% auf. Bei einem Signifikanzniveau von 5% ist also H_0 zu verwerfen, bei 1% Signifikanzniveau allerdings nicht. Dasselbe ergibt sich durch Vergleich von $|z| = 2,02$ mit den Signifikanzparametern $c = 1,96$ bzw. $c = 2,58$.

III Einseitige und zweiseitige Signifikanztests

In Abschnitt II wird die Hypothese $H_0: p=p_0$ gegen die Hypothese $H_1: p \neq p_0$ getestet. Die Hypothese H_0 wird also abgelehnt, wenn der Stichprobenwert entweder zu weit links oder zu weit rechts vom Erwartungswert liegt. Man spricht daher auch von einem zweiseitigen Signifikanztest.

Dagegen gibt es auch Tests, bei denen die Hypothese H_0 nur dann abgelehnt wird, wenn der Stichprobenwert zu weit links liegt (linksseitiger Test) bzw. zu weit rechts liegt (rechtsseitiger Test). In diesem Fall spricht man von einem einseitigen Test.

Im Falle eines linksseitigen Tests wird daher als Annahmebereich ein σ -Intervall verwendet, das die Form $[\mu - c\sigma ; n]$ hat. Die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten für solche Intervalle kann wie in Abschnitt I erfolgen. Als Beispiel wird die Berechnung für $c=1$ beschrieben.

Im Rechenfenster wird der Wert mithilfe der Funktion `normalcdf` berechnet, die man im [DISTR]-Menu mit

`2nd` `VARS` `2`

aufruft. Die Berechnung erfolgt einfach durch Eingabe von unterer und oberer Grenze, siehe Abbildung. Für die obere Grenze ist hier 100 eingegeben (vgl. Kapitel 3 II).

```
normalcdf(-1,100)
                .8413
```

Alternativ kann die Berechnung auch im Grafikfenster erfolgen. Als Funktion wird die Gaußfunktion `normalpdf` im `Y=`-Fenster als Funktion Y_1 eingegeben, die man im [DISTR]-Menu mit

`2nd` `VARS` `1`

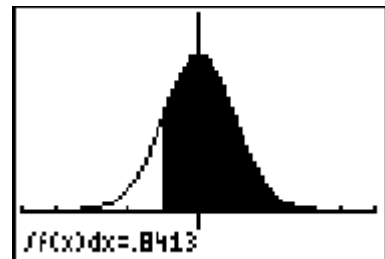
aufruft.

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=normalpdf(X)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

Der Zeichenbereich wird wie nebenstehend eingestellt.

```
WINDOW
Xmin=-5
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-.1
Ymax=.5
Yscl=1
Xres=1
```

Der Flächeninhalt kann als Integral im Grafikfenster (Bereich -1 bis 5) berechnet werden. Dabei wird als obere Grenze 5 gewählt, da für $x > 5$ der restliche Flächeninhalt praktisch Null ist.



Auf diese Weise kann man auch für weitere „ σ -Intervalle“ der Form $[\mu - c\sigma ; n]$ die Wahrscheinlichkeiten berechnen. Man erhält durch Rückübertragung auf die Binomialverteilung:

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq n) \approx 97,7\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq n) \approx 99,9\%$$

$$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq n) \approx 95\%$$

$$P(\mu - 2,33\sigma \leq X \leq n) \approx 99\%$$

```
normalcdf(-2,100)
                .9772
normalcdf(-3,100)
                .9987
normalcdf(-1.64,
100)
                .9495
normalcdf(-2.33,
100)
                .9901
```

Im Falle eines rechtsseitigen Tests wird entsprechend als Annahmebereich ein σ -Intervall verwendet, das die Form $[0 ; \mu + c\sigma]$ hat. Dafür ergibt sich analog:

$$P(0 \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 84,1\%$$

$$P(0 \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 97,7\%$$

$$P(0 \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,9\%$$

$$P(0 \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 95\%$$

$$P(0 \leq X \leq \mu + 2,33\sigma) \approx 99\%$$

Der Zusammenhang der oben ermittelten Parameter c mit den zugehörigen Signifikanzniveaus bei rechts- bzw. linksseitigen Tests ist also folgendermaßen:

Parameter c	1	2	3	1,64	2,33
Signifikanzniveau	15,9%	2,3%	0,1%	5%	1%

Beispiel für einen einseitigen Signifikanztest:

Die Schülerin Jana behauptet, dass sie bei einer vorgelegten Euromünze nur durch ertasten erkennt, ob es eine deutsche Münze ist oder nicht.

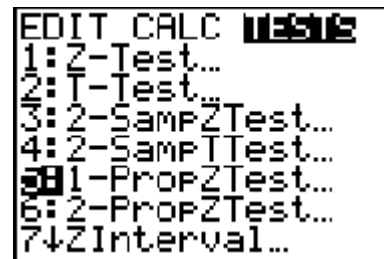
Zur Überprüfung wird die Hypothese $H_0 : p = 0,5$ („Jana rät nur“) gegen die Hypothese $H_1 : p > 0,5$ („Jana erkennt deutsche Münzen durch Tasten“) rechtsseitig getestet. Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit, dass Jana richtig ertastet, ob eine deutsche Münze vorliegt oder nicht. Es wird ein Stichprobenumfang $n = 50$ und ein Signifikanzniveau von 5% festgelegt. Die Anzahl der richtig ertasteten Münzen ist binomial verteilt mit den Parametern $n=50$ und p . Für $p = 0,5$ ergibt sich $\mu = 25$ und $\sigma = 3,5$. Den Annahmebereich A bilden alle Werte, die kleiner als $\mu + 1,64\sigma$ sind, also ist $A=[0; 30,7]$.

Falls Jana also höchstens 30 Münzen richtig ertastet, kann die Hypothese H_0 auf dem 5%-Signifikanzniveau nicht verworfen werden.

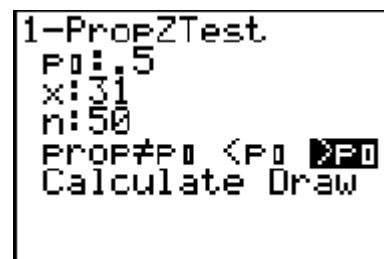
Die Verwendung des im Rechner implementierten Tests 1-PropZTest führt im Prinzip auf gleiche Art zum obigen Ergebnis.

Dieser Test wird vom Rechenfenster aus dem STAT-TESTS -Menü aufgerufen:

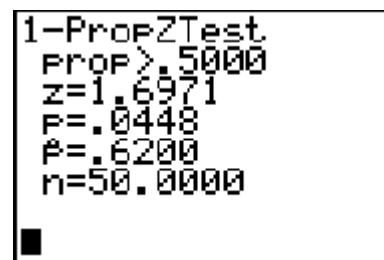
STAT 5



Die Daten werden wie nebenstehend eingegeben. Die Bezeichner p_0 , x , n entsprechen den oben verwendeten, statt p wird $prop$ verwendet. Es wird als Beispiel $x = 31$ angenommen.

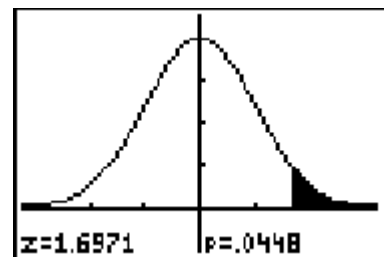


Die Auswahl von Calculate liefert dann die nebenstehende Ausgabe. Dabei gibt z an, um wie viele Standardabweichungen σ das Ergebnis x vom Erwartungswert μ abweicht, also $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.



\hat{p} ist die relative Häufigkeit für x : $\hat{p} = \frac{x}{n}$.

p gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Ergebnis um mindestens z Standardabweichungen vom Erwartungswert nach rechts abweicht. Das wird durch die Grafik verdeutlicht, die sich bei Auswahl von Draw im Test (s.o.) ergibt. Dabei wird – wie oben – eine Normalverteilung mit den Parametern μ und σ zu Grunde gelegt.



Das Ergebnis $x=31$ ist also folgendermaßen zu interpretieren:

Ein solches Ergebnis oder ein mit noch größeres tritt nur mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit, nämlich etwa 4,5% auf.

Bei einem Signifikanzniveau von 5% ist also H_0 bei dem Ergebnis $x = 31$ zu verwerfen. Dasselbe ergibt sich durch Vergleich von $z = 1,70$ mit dem Signifikanzparameter $c = 1,64$.

5 Simulation von Zufallsexperimenten

Stochastikunterricht wird durch Einbeziehung von Experimenten lebendiger. Am besten führen die Schüler die Experimente mit geeigneten Hilfsmitteln selbst durch. Nicht immer wird die Zeit allerdings zum Experimentieren ausreichen, so dass sich als Ersatz Simulationen anbieten, die mit dem TI-83 Plus ohne großen Zeitaufwand durchführbar sind.

I Listen von gleich verteilten Zufallszahlen erzeugen und darstellen

Am Beispiel des Würfels wird aufgezeigt, wie man Listen bei Simulationen verwendet. Eine Liste ist beim TI-83 Plus eine Menge von geordneten Zahlen, im folgenden Beispiel eine Menge von Ergebnissen beim Würfeln.

Der TI-83 Plus verwendet zum Erzeugen von gleichverteilten Zufallszahlen den Befehl `randInt`. Er wird aus dem Rechenfenster im `MATH`-Menü aufgerufen.

- `2nd` `MODE` `[QUIT]`
- `MATH` `[<]` `[MATH-PRB]`
- `[5]`

Variante 1: Werden zwei Parameter a und b eingegeben, so liefert `randInt` eine ganzzahlige Zufallszahl aus dem Intervall $[a;b]$.

- `1` `[,]` `6` `[ENTER]` `[ENTER]` ...

Mehrfaches Drücken der `[ENTER]`-Taste liefert weitere Zufallszahlen.

```
MATH NUM CPX [2nd]
1:rand
2:nPr
3:nCr
4:!
5:randInt(
6:randNorm(
7:randBin(
```

```
randInt(1,6)
CALC
```

Variante 2: Werden drei Parameter a , b , z eingegeben, so liefert `randInt` eine Liste mit z ganzzahligen Zufallszahlen aus dem Intervall $[a;b]$.

- `MATH` `[<]` `[5]` `1` `[,]` `6` `[,]` `20` `[ENTER]` .

Durch die Liste kann man mithilfe der Pfeiltasten `[<]` `[>]` rollen.

```
randInt(1,6,20)
[3] 1 6 4 3 1 5 ...
█
```

Zur weiteren Bearbeitung wird die Liste als Listenvariable L_1 gespeichert.

- `[STO>]` `2nd` `[1]` `[ENTER]`.

```
randInt(1,6,20)
[3] 1 6 4 3 1 5 ...
Ans→L1
[3] 1 6 4 3 1 5 ...
█
```

Die Liste kann auf verschiedene Weise als StatPlot grafisch dargestellt werden. Dazu wird in der Funktionstastenleiste eingegeben:

- `2nd` `[Y=]`

Es stehen drei Plots zur Verfügung, die gemeinsam mit den im `[Y=]`-Editor eingegebenen Funktionen grafisch dargestellt werden können. Dazu müssen die Plots definiert werden.

```
STAT PLOIS
1:Plot1...On
  [✓] L1 XAxis [ ]
2:Plot2...Off
  [✓] L1 L3 [ +
3:Plot3...Off
  [✓] L1 L4 [ ]
4:PlotsOff
```

Die Definition von Plot1 erfolgt mit der Auswahl

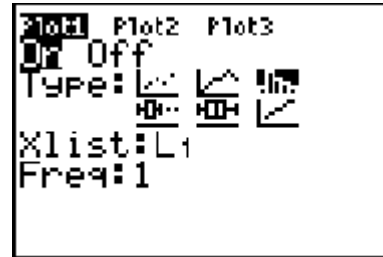
1.

Zum Einschalten wird der Cursor auf **On** bewegt und **ENTER** eingegeben.



Zur Auswahl des Plot-Typs wird der Cursor auf den gewünschten Typ bewegt und **ENTER** eingegeben.

Hier wurde bei Type in der oberen Reihe der dritte Typ gewählt, um die Liste als Histogramm (Häufigkeitsdiagramm) darzustellen. Wie in **Xlist** zu erkennen ist, braucht dieser Typ nur eine Liste für die Darstellung. Dort wird **L1** eingegeben.



Nun kann der Plot grafisch dargestellt werden. Zuvor wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

WINDOW

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

Vor dem Zeichnen sind gegebenenfalls alle aktiven Funktionen im **Y=**-Fenster zu deaktivieren.

Das Histogramm wird nun mit

GRAPH

dargestellt.

Wenn man die Liste als StatPlot so darstellen will, dass auf der Rechtsachse die Wurfnummer und auf der Hochachse das Wurfresultat dargestellt wird, muss man zunächst eine Liste für die Wurfnummern erzeugen.

Das wird im Rechenfenster folgendermaßen vorgenommen:

2nd **MODE** **[QUIT]**

2nd **STAT** **[List Ops]**

5 **[X,T,θ,n]** **,** **[X,T,θ,n]** **,** **1** **,** **20** **]** **STO▶** **2nd** **2** **ENTER**

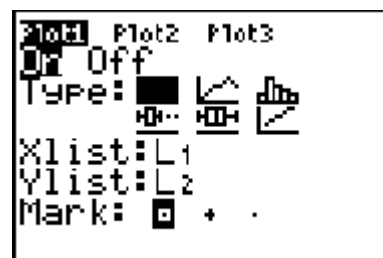
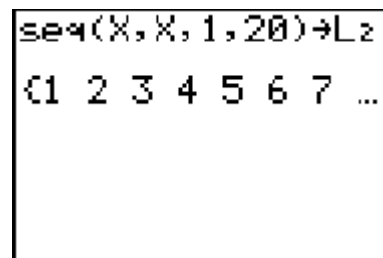
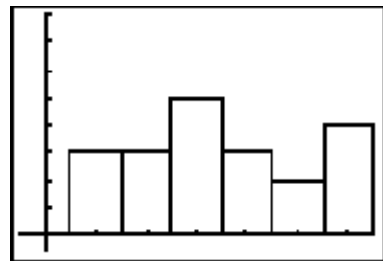
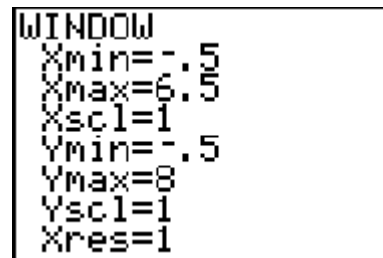
Die Liste wird mit dem **seq**-Befehl erzeugt, der als ersten Parameter das Bildungsgesetz der Folge, als zweiten Parameter die Folgevariable und dann die Grenzen (von ... bis) erwartet. Es ist zu beachten, dass die Grenzen denen von **L1** entsprechen.

Die erzeugte Liste wird als **L2** gespeichert.

Der gewünschte Plot wird durch Abändern von Plot1 definiert:

2nd **Y=** **1**

Der Plot wird wieder auf **On** gesetzt, dann wird bei Type in der oberen Reihe der erste Typ gewählt, um die Liste als Folge darzustellen.



Da L_1 die Werte der Rechtsachse enthält und L_2 die Werte der Hochachse, werden noch bei $Xlist$ und $Ylist$ die Parameter L_1 und L_2 vertauscht, indem der Cursor an die entsprechenden Stellen bewegt werden und dann die Listen als

2^{nd} 2 bzw.

2^{nd} 1

eingetragen werden.

Nun kann der Plot grafisch dargestellt werden. Zuvor wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

$WINDOW$

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

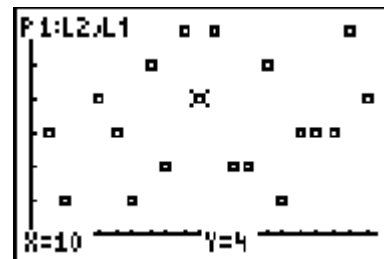
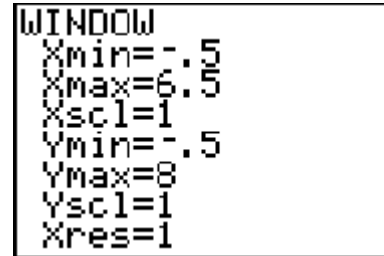
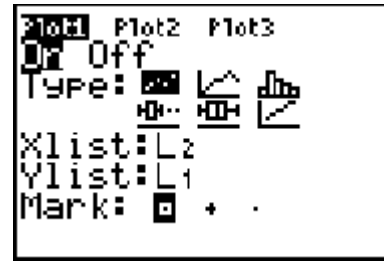
Vor dem Zeichnen sind gegebenenfalls alle aktiven Funktionen im $Y=$ -Fenster zu deaktivieren.

Die Wurffolge wird nun mit

$GRAPH$

dargestellt.

Durch die Folge kann man sich mithilfe der $TRACE$ -Taste und der Pfeiltasten bewegen und Werte ablesen. In der Abbildung erkennt man, dass der zehnte Wurf das Ergebnis 4 hatte.



II Binomial verteilte Zufallszahlen

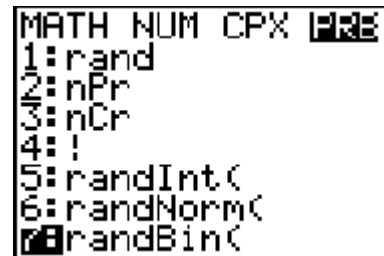
Der TI-83 Plus kann nicht nur gleich verteilte Zufallszahlen erzeugen, sondern auch Zufallszahlen, die bestimmte Verteilungen aufweisen. So ist es mit dem Befehl $randBin$ möglich, binomial verteilte Zufallszahlen zu erzeugen und darzustellen.

Der Befehl $randBin$ wird aus dem Rechenfenster im $MATH$ -Menü aufgerufen.

2^{nd} $MODE$ $[QUIT]$

$MATH$ \leftarrow $[MATH-PRB]$

7

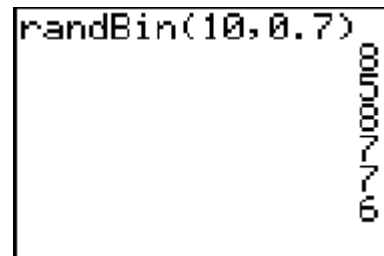


Variante 1: Werden zwei Parameter n und p eingegeben, so liefert $randBin$ eine ganzzahlige Zufallszahl aus dem Intervall $[0;n]$.

Diese kann man sich folgendermaßen entstanden denken: Ein Glücksrad mit zwei Sektoren „Treffer“ und „Niete“ wird n -mal gedreht. Dabei ist p die Trefferwahrscheinlichkeit. Ausgegeben wird die Zahl der Treffer. Als Beispiel werden $n=10$ und $p=0,7$ gewählt.

10 $,$ 0.7 $)$ $ENTER$ $ENTER$...

Mehrfaches Drücken der $ENTER$ -Taste liefert weitere Zufallszahlen.



Variante 2: Werden drei Parameter n , p , z eingegeben, so liefert `randBin` eine Liste mit z solchen Zufallszahlen. Im Beispiel sind $n=10$, $p=0,7$ und $z=50$ gewählt worden.

`MATH` `◀` `7` `10` `,` `0.7` `,` `50` `)` `ENTER`

Durch die Liste kann man mithilfe der Pfeiltasten `◀` `▶` rollen.

```
randBin(10,0.7,50)
0)
{3 8 5 8 7 9 6 ...
█
```

Zur weiteren Bearbeitung wird die Liste als Listenvariable L_1 gespeichert.

`STO▶` `2nd` `1` `ENTER`

Diese Liste kann nun wie in Abschnitt I beschrieben als Histogramm dargestellt werden.

```
randBin(10,0.7,50)
0)
{3 8 5 8 7 9 6 ...
Ans→L1
{3 8 5 8 7 9 6 ...
```

Dazu wird in der Funktionstastenleiste eingegeben:

`2nd` `Y=`

```
STAT>PLOTS
1:Plot1...On
  L1 XAxis
2:Plot2...Off
  L1 L3
3:Plot3...Off
  L1 L4
4:PlotsOff
```

Das Histogramm soll als Plot1 dargestellt werden:

`1`

Plot1 wird eingeschaltet, indem der Cursor auf `On` bewegt und

`ENTER`

eingegeben wird.

```
Plot1 Plot2 Plot3
On Off Off
Type: ▽ ▽ ▽
Data List:L1
Data Axis:Y
Mark: + .
```

Als Plot-Typ wird „Histogramm“ ausgewählt, indem der Cursor auf den gewünschten Typ (erste Zeile, dritte Auswahl) bewegt und

`ENTER`

eingegeben wird. Als Xlist wird die Liste L_1 gewählt, nachdem der Cursor an die entsprechende Stelle bewegt wurde:

`2nd` `1`

```
Plot1 Plot2 Plot3
Off Off Off
Type: ▽ ▽ ▽
Xlist:L1
Freq:1
```

Nun kann der Plot grafisch dargestellt werden. Zuvor wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

`WINDOW`

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

Vor dem Zeichnen sind gegebenenfalls alle aktiven Funktionen im `Y=`-Fenster zu deaktivieren.

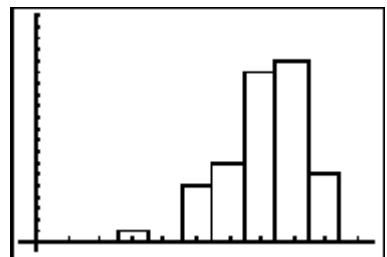
Das Histogramm wird nun mit

`GRAPH`

dargestellt.

Man sieht die Ähnlichkeit des Histogramms mit der Binomialverteilung mit den Parametern $n=20$ und $p=0,7$.

```
WINDOW
Xmin=-.5
Xmax=10.5
Xscl=1
Ymin=-.5
Ymax=20
Yscl=1
Xres=1
```



Wenn man die Binomialverteilung behandelt hat, ist es natürlich sinnvoll, das „experimentell“ erhaltene Histogramm mit der theoretischen Verteilung grafisch zu vergleichen. Dazu sollen drei Varianten vorgestellt werden. Normalerweise wird man nur mit einer dieser Varianten arbeiten. Vor dem Weiterlesen kann man sich daher durch Vorschau auf die produzierten Grafiken für eine der Varianten entscheiden.

Variante 1 (Binomialverteilung als Treppendiagramm):

Die Funktion `binompdf` wird mit den zugehörigen Parametern und variablem X in den $Y=$ -Editor eingegeben. Die Werte sind mit 50, der obigen Anzahl von Zufallszahlen zu multiplizieren.

- $Y=$ 50 \times 2^{nd} $VARS$ 0 `binompdf(`
- 10 $,$ 0.7 $,$ $MATH$ \triangleright 2 $[X,T,\theta,n]$ $,$ 0 $)$ $)$

Die `round`-Funktion aus dem $MATH$ -NUM-Menu wird verwendet, damit der dritte Parameter der `binompdf`-Funktion ganzzahlig ist. Die theoretische Verteilung wird über das vorhandene Diagramm gezeichnet; man sieht die Übereinstimmung.

- $GRAPH$

Der Vorgang kann durch Löschen des Bildschirms mit

- 2^{nd} $PRGM$ 1 (`ClrDraw`)

wiederholt werden.

Variante 2 (Verwendung des Folgenmodus):

Es ist möglich, die Werte der Binomialverteilung als Folge darzustellen. Dazu wird der Folgenmodus eingestellt:

- $MODE$ Seq

Mithilfe der Funktion `binompdf` wird der Funktionsterm für die Folge eingegeben:

- $Y=$
- 50 \times 2^{nd} $VARS$ 0 `binompdf(`
- 10 $,$ 0.7 $,$ $[X,T,\theta,n]$ $)$

Die Fenstereinstellung ist wie nebenstehend vorzunehmen. Die weiteren Werte können bleiben (siehe Einstellung oben).

Die theoretische Verteilung wird über das vorhandene Diagramm gezeichnet.

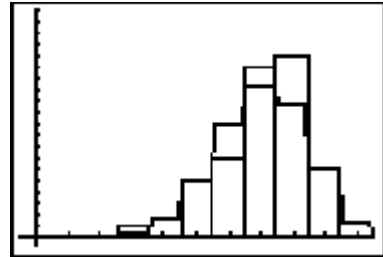
- $GRAPH$

Allerdings werden in der Grundeinstellung die Daten nur als kleine Punkte sichtbar.

```

2nd Plot2 Plot3
Y1=50*binompdf(
10,0.7,round(X,0
))
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=

```



```

Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degrees
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bt re^ct
Full Horiz G-T

```

```

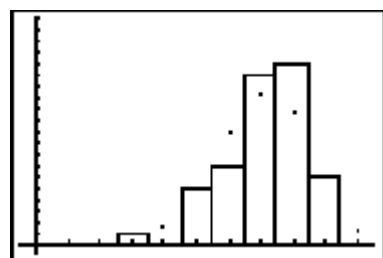
2nd Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=binompdf(1
0,0.7,n)*50
u(nMin)=
w(n)=
v(nMin)=
w(n)=

```

```

WINDOW
nMin=0
nMax=10
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=-.5
Xmax=10.5
↓Xscl=1

```



Man kann im $\boxed{Y=}$ -Editor einen anderen Zeichenstil wählen. Dazu bewegt man den Cursor links neben $u(n)$ und drückt mehrfach die $\boxed{\text{ENTER}}$ -Taste, bis der gewünschte Stil erscheint.

```

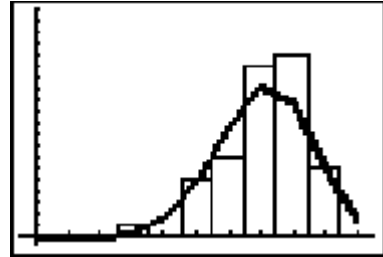
Plot2 Plot3
nMin=0
u(n) binomPdf(1
0,0.7,n)*50
u(nMin)
w(n)=
v(nMin)=
w(n)=

```

Die theoretische Verteilung wird über das vorhandene Diagramm gezeichnet.

$\boxed{\text{GRAPH}}$

Allerdings ist die Auswahl an Zeichenstilen nicht sehr groß.



Variante 3 (Verwendung eines weiteren StatPlots)

Zunächst wird wieder in den Funktionsmodus zurückgeschaltet:

$\boxed{\text{MODE}}$ Func

Alle im $\boxed{Y=}$ -Editor befindlichen Funktionen werden gelöscht oder deaktiviert.

```

Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian 009999
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bt re^0t
Full Horiz G-T

```

Es wird nun eine Liste erzeugt, welche die möglichen Trefferzahlen enthält, im Beispiel also von 0 bis 10. Das wird im Rechenfenster folgendermaßen vorgenommen:

$\boxed{2\text{nd}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ [QUIT]

$\boxed{2\text{nd}}$ $\boxed{\text{STAT}}$ \blacktriangleright [List Ops]

$\boxed{5}$ $\boxed{X,T,\theta,n}$ $\boxed{,}$ $\boxed{X,T,\theta,n}$ $\boxed{,}$ $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{10}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{STO}}$ \blacktriangleright $\boxed{2\text{nd}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

Die Liste wird mit dem `seq`-Befehl erzeugt, der als ersten Parameter das Bildungsgesetz der Folge, als zweiten Parameter die Folgenvariable und dann die Grenzen (von ... bis) erwartet.

Die erzeugte Liste wird als L_2 gespeichert.

Nun wird die Binomialverteilung als Liste L_3 erzeugt, mit der obigen Anzahl $z=50$ von Zufallszahlen multipliziert. Dazu braucht man bei der Funktion `binompdf` nur die Parameter n und p anzugeben.

Der gewünschte Plot wird als Plot2 definiert:

$\boxed{2\text{nd}}$ $\boxed{Y=}$ $\boxed{2}$

```

seq(X,X,0,10)→L2
(0 1 2 3 4 5 6 ...

```

```

seq(X,X,0,10)→L2
(0 1 2 3 4 5 6 ...
binomPdf(10,0.7)
*50→L3
(2.95245E-4 .00...

```

```

STAT PLOTS
1:Plot1...On
  ▾ L1 1
2:Plot2...On
  ▾ L2 L3
3:Plot3...Off
  ▾ L1 L4
4:PlotsOff

```

Plot2 wird eingeschaltet, indem der Cursor auf `On` bewegt und

$\boxed{\text{ENTER}}$

eingegeben wird.

```

Plot1 Plot3
Off
Type: ▾ ▾ ▾
Xlist:L2
Ylist:L3
Mark: ▾ + .

```

Als Plot-Typ wird der erste Typ (Punktdarstellung) ausgewählt, indem der Cursor dorthin bewegt wird und

ENTER

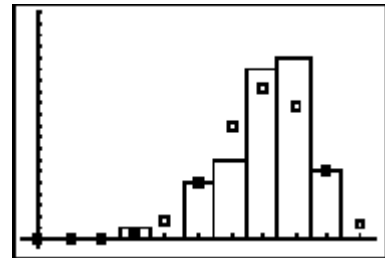
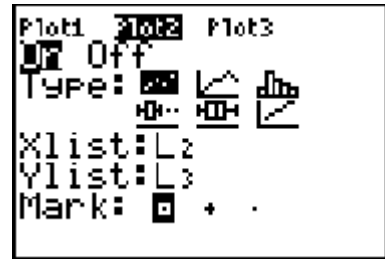
einggegeben wird. Als $Xlist$ wird die Liste L_2 gewählt, als $Ylist$ wird die Liste L_3 gewählt, nachdem der Cursor jeweils an die entsprechende Stelle bewegt wurde. Als Markierung wird die erste durch Eingabe von **ENTER** ausgewählt.

Nun können beide Plots dargestellt werden:

GRAPH

Man sieht die zufällig erzeugte Verteilung als Histogramm und die theoretische als deutlich erkennbares Punktdiagramm.

Diese Darstellung ist wohl die beste, allerdings ist der Aufwand relativ groß, um sie zu erzeugen.



III Normal verteilte Zufallszahlen

Die Erzeugung normal verteilter Zufallszahlen ist mit dem Befehl `randNorm` möglich.

Der Befehl `randNorm` wird aus dem Rechenfenster im **MATH**-Menü aufgerufen.

2nd **MODE** **[QUIT]**

MATH **◀** **[MATH-PRB]**

6

```
MATH NUM CPX [2nd]
1:rand
2:nPr
3:nCr
4:!
5:randInt(
6:randNorm(
7:randBin(
```

Variante 1: Werden zwei Parameter μ und σ eingegeben, so liefert `randNorm` eine reelle Zufallszahl entsprechend der Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ .

Als Beispiel werden $\mu = 10$ und $\sigma = 2$ gewählt.

10 **,** 2 **ENTER** **ENTER** ...

Mehrfaches Drücken der **ENTER**-Taste liefert weitere Zufallszahlen.

```
randNorm(10,2)
9.225043755
9.843927473
11.21876649
9.39589695
8.223263284
11.88362879
```

Variante 2: Werden drei Parameter μ , σ und z eingegeben, so liefert `randNorm` eine Liste mit z normal verteilten Zufallszahlen bzgl. Erwartungswert μ und Standardabweichung σ .

MATH **◀** **6** 10 **,** 2 **,** 50 **ENTER**

Durch die Liste kann man mithilfe der Pfeiltasten **◀** **▶** rollen.

```
randNorm(10,2,50)
(11.58890938 9...
```

Zur weiteren Bearbeitung wird die Liste als Listenvariable L_1 gespeichert.

STO▶ **2nd** **1** **ENTER**

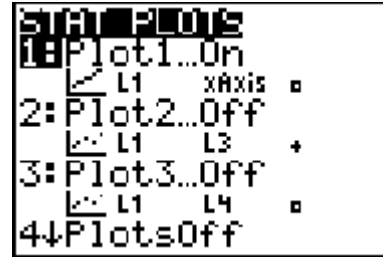
Die Liste soll als Histogramm dargestellt werden.

Zuvor werden im **Y=**-Editor alle Funktionen und Plots deaktiviert.

```
randNorm(10,2,50)
(11.58890938 9...
Ans→L1
(11.58890938 9...
```

Die Liste wird als Plot1 definiert.

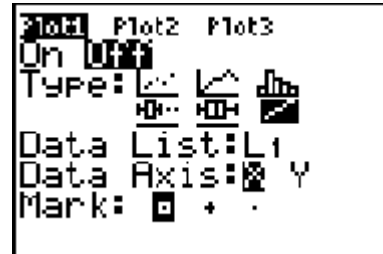
2nd **Y=** **1**



Plot1 wird eingeschaltet, indem der Cursor auf On bewegt und

ENTER

einggegeben wird.

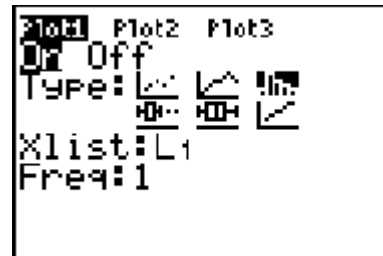


Als Plot-Typ wird „Histogramm“ ausgewählt, indem der Cursor auf den gewünschten Typ bewegt und

ENTER

eingegeben wird. Als Xlist wird die Liste L₁ gewählt, nachdem der Cursor an die entsprechende Stelle bewegt wurde:

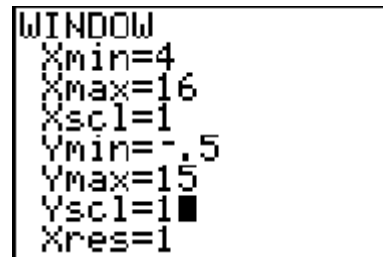
2nd **1**



Nun kann der Plot grafisch dargestellt werden. Zuvor wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt. Die x-Werte werden im Bereich von 3 σ -Intervallen um μ gewählt.

WINDOW

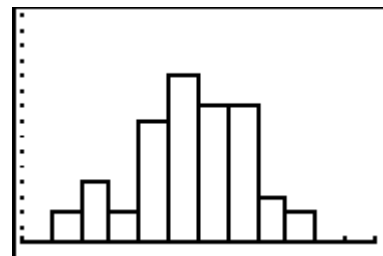
Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.



Mit

GRAPH

erscheint das gewünschte Histogramm.



Die passende Normalverteilungskurve kann folgendermaßen hinzugefügt werden. Man gibt im **Y=**-Editor ein:

2nd **PRGM** **1** normalpdf(

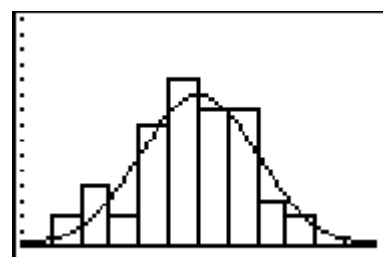
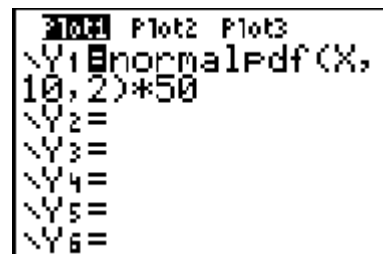
X,T,θ,n **,** **10** **,** **2** **)** **×** **50****>>**

Die Werte der Funktion normalpdf sind mit der Anzahl $z=50$ der Zufallszahlen multipliziert.

Mit

GRAPH

erscheint das Histogramm mit der passenden Normalverteilungskurve.



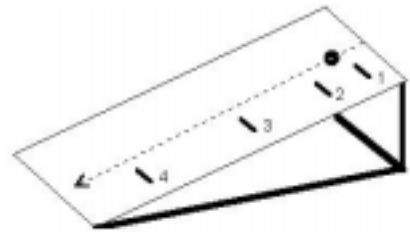
6 Regression

Durch eine Reihe von Messpunkten soll eine möglichst gut passende Kurve gelegt werden. Der TI-83 Plus bietet eine ganze Palette von Funktionstypen zur Lösung dieser Aufgabe nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Dabei werden Listen verwendet. Zum Arbeiten mit den Listen werden die Menüs **[STAT]** und **[2nd] [STAT] [List]** benutzt.

I Quadratische Regression als Beispiel

Mit dem folgenden einfachen Experiment wird gemessen, wie sich eine Kugel eine schiefe Ebene hinab bewegt. Man besorge sich ein Metronom und für jede Experimentiergruppe ein etwa ein bis zwei Meter langes Brett, eine kleine Stahlkugel, ein Stück Kreide und einen Meterstab. Das Metronom wird auf Sekundentakt eingestellt, das Brett leicht geneigt gelagert. Bei einem bestimmten Taktsignal wird die Kugel am oberen Ende des Brettes losgelassen. Dann wird bei jedem folgenden Taktsignal die Kugelposition mit einem Kreidestrich markiert. Die Abstände s der Kreidestriche zum oberen Ende des Brettes werden gemessen.



Man erhält damit z.B. folgende Messwerte:

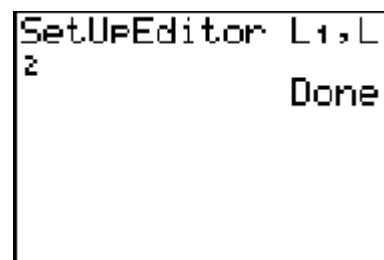
Zeit t in sec	0	1	2	3	4	5
Weg s in m	0	0,06	0,19	0,44	0,78	1,24

Zunächst werden die Messwerte als Listen L_1 , L_2 im Listeneditor eingegeben.

Vor Eingabe wird der Listeneditor mit dem Befehl **SetUpEditor**

[STAT] [5] [2nd] [1] [,] [2nd] [2] [ENTER]

für die Aufnahme der Listen L_1 , L_2 vorbereitet.



Falls L_1 und L_2 noch Elemente enthalten, können sie im Rechenfenster mit dem Befehl

[STAT] [4] [2nd] [1] [,] [2nd] [2] [ENTER] [ClrList]

gelöscht werden. Mit

[STAT] [1]

gelangt man in den Listeneditor. In L_1 werden die Zeiten und in L_2 die Wege aus der Tabelle eingetragen.

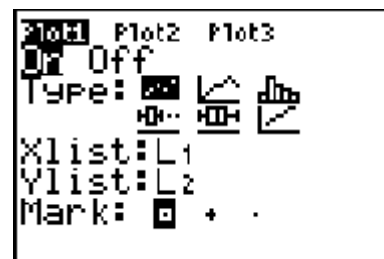
L1	L2	----- 2
0.0000	0.0000	
1.0000	0.0600	
2.0000	0.1900	
3.0000	0.4400	
4.0000	0.7800	
5.0000	1.2400	
-----	-----	
L2(?) =		

Die Messpunkte werden grafisch dargestellt, indem ein StatPlot mithilfe der eingegebenen Listen erstellt wird:

[2nd] [Y=] [1]

Der Plot wird auf **0n** gesetzt, dann wird bei **Type** in der oberen Reihe der erste Typ gewählt, um die Messpunkte darzustellen.

Für **Xlist** und **Ylist** werden die Voreinstellungen L_1 und L_2 beibehalten. Auf diese Weise werden die Zeiten als X-Werte und die Wege als Y-Werte dargestellt.



Als Markierung **Mark** wird ein kleines Quadrat gewählt

stellung).

Nun kann der Plot grafisch dargestellt werden. Zuvor wird noch eine passende Fenstergröße eingestellt.

WINDOW

```
WINDOW
Xmin=-.5
Xmax=5.5
Xscl=1
Ymin=-.2
Ymax=1.5
Yscl=.2
Xres=1
```

Die Werte werden entsprechend der Abbildung eingegeben.

Vor dem Zeichnen sind gegebenenfalls alle aktiven Funktionen im **Y=**-Fenster zu deaktivieren.

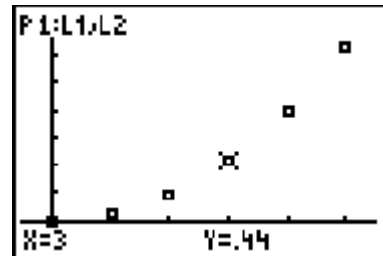
Die Messwerte können nun mit

GRAPH

dargestellt werden. Durch die Folge kann man sich mithilfe der

TRACE-Taste und der Pfeiltasten bewegen und Werte ablesen.

In der Abbildung erkennt man z.B., dass zur Zeit $X=3$ der Weg $Y=0.44$ gehört.



Es sieht so aus, als lägen die Messwerte auf einer Parabel. Mit dem Rechner wird daher mithilfe einer quadratischen Regression eine angepasste Parabel bestimmt. Zunächst wird das Menü zur Auswahl möglicher Regressionsfunktionen ausgewählt:

STAT **▸**

```
EDIT [2nd][DEL] TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg
```

Durch die Auswahl

5

wird der Befehl **QuadReg** für die quadratische Regression ins Rechenfenster übertragen. Es werden die Parameter L_1 , L_2 , Y_1 ergänzt:

```
SetUpEditor L1,L2
Done
QuadReg L1,L2,Y1
```

2nd **1** , **2nd** **2** , **VAR** **▸** **1** **1**

Durch Eingabe von

ENTER

wird dann eine quadratische Regression durchgeführt; die ermittelte quadratische Funktion wird nach Y_1 übertragen.

```
QuadReg
y=ax^2+bx+c
a=.0507
b=-.0076
c=.0057
```

Das lässt sich durch Aufruf des **Y=**-Editors bestätigen:

Y=

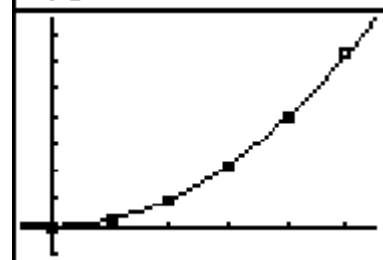
```
Plot2 Plot3
Y1=.0507X^2+-.0076X+.0057
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

Schließlich kann durch

GRAPH

die bestimmte Kurve durch die Messpunkte gezeichnet werden.

Sie stellt offenbar eine gute Näherung für die Messwerte dar.



Zusätzlich kann man noch untersuchen, wie genau die Kurve durch die Messpunkte verläuft. Dazu werden zwei weitere Listen hinzugefügt: eine Liste L_Y für die Y-Werte der angepassten Kurve bei den durch die Messung vorgegebenen Zeitwerte und eine Liste L_{DIFF} für die Differenzen $L_Y - L_2$. Dazu geht man in den Listeneditor

STAT

und bewegt den Cursor in die Kopfzeile der dritten Spalte.

Dort gibt man den ersten Namen ein:

Y **ENTER**

Durch nochmalige Eingabe von **ENTER** gelangt man in die Fußzeile und kann dort die Liste L_Y definieren:

VARS **▶** **1** **1** **(** **2nd** **1** **)**

Durch Eingabe von

ENTER

erscheint die gewünschte Liste L_Y .

Man sieht durch Vergleich mit L_2 schon die Güte der Näherung.

L1	L2	
0.0000	0.0000	
1.0000	.0600	
2.0000	.1900	
3.0000	.4400	
4.0000	.7800	
5.0000	1.2400	
-----	-----	
Name=		

L1	L2	Y	3
0.0000	0.0000		
1.0000	.0600		
2.0000	.1900		
3.0000	.4400		
4.0000	.7800		
5.0000	1.2400		
-----	-----		
Y=Y1(L1)			

L1	L2	Y	3
0.0000	0.0000	.0057	
1.0000	.0600	.0488	
2.0000	.1900	.1933	
3.0000	.4400	.4392	
4.0000	.7800	.7865	
5.0000	1.2400	1.2352	
-----	-----	-----	
Y(1) = .0057			

Analog wird die Liste L_{DIFF} erstellt.

Dabei kann der Listenname für L_Y aus dem Menu **2nd** **STAT** **[LIST]** abgerufen werden.

L2	Y	DIFF	4
0.0000	.0057		
.0600	.0488		
.1900	.1933		
.4400	.4392		
.7800	.7865		
1.2400	1.2352		
-----	-----	-----	
DIFF = LY - L2			

Die Liste L_{DIFF} zeigt schließlich, wie gut die angepasste Kurve die Messpunkte trifft.

L2	Y	DIFF	4
0.0000	.0057	.0057	
.0600	.0488	-.0112	
.1900	.1933	.0033	
.4400	.4392	-.0E-4	
.7800	.7865	.0065	
1.2400	1.2352	-.0048	
-----	-----	-----	
DIFF(1) = .0057			

II Schaubild einer ganzrationalen Funktion durch maximal fünf Punkte

Der Rechner kann Regressionen mit ganzrationalen Funktionen maximal vierten Grades durchführen. Daher ist die Bestimmung einer ganzrationalen Funktionen durch maximal fünf Punkte einfach. Beispiel: Ganzrationale Funktion durch die Punkte $P_1(-3|2)$, $P_2(-1|0)$, $P_3(0|3)$, $P_4(2.5|-1)$, $P_5(4|-3)$.

Die Lösung der Aufgabe entspricht fast vollständig der in Abschnitt I. Daher sind hier nur die entsprechenden Rechneransichten wiedergegeben:

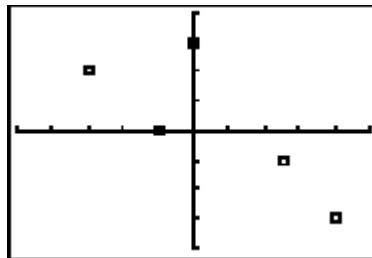
```
SetUpEditor L1,L
2
Done
ClrList L1,L2
Done
```

L1	L2	----- 2
-3.000	2.0000	
-1.000	0.0000	
0.0000	3.0000	
2.5000	-1.000	
4.0000	-3.000	
-----	-----	

L2(6) =

```
Plot2 Plot3
Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L1
Ylist:L2
Mark: [ ] + .
```

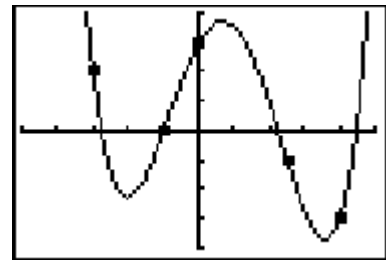
```
WINDOW
Xmin=-5
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-4
Ymax=4
Yscl=1
Xres=1
```



```
EDIT [ ] [ ] TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg
```

```
SetUpEditor L1,L
2
Done
ClrList L1,L2
Done
QuartReg L1,L2,Y
1
```

```
QuarticReg
y=ax^4+bx^3+...+e
a=.1082
b=-.3190
c=-1.3498
d=2.0775
e=3.0000
```



Alternativ kann man mit dem Ansatz: $f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$ ein LGS aufstellen:

$$\begin{aligned}
 f(-3) = 2 &\Leftrightarrow 81a - 27b + 9c - 3d + e = 2 \\
 f(-1) = 0 &\Leftrightarrow a - b + c - d + e = 0 \\
 f(0) = 3 &\Leftrightarrow e = 3 \\
 f(2.5) = -1 &\Leftrightarrow 39.0625a + 15.625 + 6.25c + 2.5d + e = -1 \\
 f(4) = -3 &\Leftrightarrow 256a + 64b + 16c + 4d + e = -3
 \end{aligned}$$

Zur Lösung des LGS wird der Matrixeditor aufgerufen mit

2^{nd} $[x^{-1}]$ $[]$ $[ENTER]$ 5 $[ENTER]$ 6 $[ENTER]$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix eingegeben.

```
MATRIX[A] 5 x6
-3.000 1.0000 2.0000 1
-1.000 1.0000 0.0000 1
0.0000 1.0000 3.0000 1
-2.5000 1.0000 -1.000 1
-4.0000 1.0000 -3.0000 1
s, 6 = -3
```

Im Rechenfenster wird das LGS mit dem `rref`-Befehl gelöst:

2^{nd} $[x^{-1}]$ $[]$

```
NAMES [ ] [ ] EDIT
@tcumSum(
A:ref(
3)rref(
C:rowSwap(
D:row+(
E:*row(
F:*row+(
```

$[ALPHA]$ B 2^{nd} $[x^{-1}]$ $[1]$ $[]$ $[ENTER]$

Um die Lösung zu sehen, rollt man mit der Pfeiltaste $[]$ bis zum rechten Ende der Ergebnismatrix.

Natürlich ist diese Lösung um einiges aufwändiger als die Lösung mithilfe der Regression.

```
rref([A])
...0000 .1082 1
...0000 -.3190 1
...0000 -1.3498 1
...0000 2.0775 1
...0000 3.0000 1 1
```

7 Markoffketten – ein Wahlthema mit GTR

Die im folgenden beschriebene Unterrichtseinheit ist unterrichtserprobt und lässt sich z.B. als Wahlthema nach dem schriftlichen Abitur oder für eine andere Lernleistung durchführen.

Falls nicht genügend Zeit zur Verfügung steht, kann man nach Abschnitt IV aufhören.

I Einführendes Beispiel

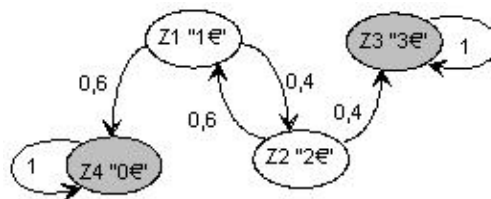
Es gibt Systeme, die in regelmäßig aufeinander folgenden Zeitpunkten mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten zwischen verschiedenen Zuständen wechseln. Man spricht von stochastischen Prozessen. Ein stochastischer Prozess heißt eine Markoff-Kette, falls

- er endlich viele Zustände $Z_1; \dots; Z_m$ besitzt,
- zeitunabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten hat,
- eine Startverteilung der Zustandswahrscheinlichkeiten existiert.

Beispiel: Spiel um 3€

Bei einem Glücksspiel setzt man einen Betrag. Dann wird ein Glücksrad mit zwei Sektoren gedreht. Bleibt es im Gewinnsektor stehen (mit Wahrscheinlichkeit $p=0,4$), so gewinnt man den doppelten Einsatz, beim Verlustsektor (Wahrscheinlichkeit $q=1-p=0,6$) verliert man den Einsatz. Ein Spieler hat nur 1€ und möchte auf 3€ kommen. Er setzt den Euro. Wenn er verliert, hört er auf. Wenn er gewinnt, setzt er nochmals 1€. Gewinnt er wieder, so hört er auf. Ansonsten fängt er wieder mit 1€ an.

Die Zustände des Spiels lassen sich gut in einem „Prozessdiagramm“ überblicken:



Es gibt vier Zustände, die durch den Besitz des Spielers gekennzeichnet sind. Die Pfeile geben an, mit welcher Übergangs-Wahrscheinlichkeit ein Zustand in den anderen übergeht. Es gibt zwei Sorten von Zuständen. Innere Zustände (hier Z_1 und Z_2) sind Zustände, die wieder verlassen werden können. Zustände wie Z_3 und Z_4 , die nicht mehr verlassen werden können, nennt man absorbierend.

Dabei gelten folgende Regeln:

- Bei jedem Zustand ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten an abgehenden Pfeilen gleich 1.
- Absorbierende Zustände erkennt man an einem Ringpfeil mit Durchlaufwahrscheinlichkeit 1.
- Die Startverteilung ist ein Vektor, der die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zustände angibt, in denen sich das System anfangs befindet. Bei jeder Startverteilung muss die Summe der Koordinaten 1 sein.

Beginnt der Spieler in Zustand Z_1 , so ist der Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Startverteilung, da sich der Spieler

mit Wahrscheinlichkeit 1 bei Z_1 befindet. Mit jedem Spiel ändert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zustände, kurz Zustandsverteilung genannt. Wie sie sich ändert, lässt sich sehr einfach mit dem TI-83 Plus berechnen.

II Berechnung von Zustandsverteilungen – theoretische Grundlagen

In dem Spiel um 3€, das in Abschnitt I erklärt ist, sei $p=0,4$. Um die Zustandsverteilung nach einem, zwei ... Spielen auszurechnen, kann man folgende Übersicht verwenden:

Verteilung\Zustand	Z1	Z2	Z3	Z4
Start	1	0	0	0
nach einem Spiel	0	0,4	0	0,6
nach zwei Spielen	0,24	0	0,16	0,6
nach drei Spielen	0	0,096	0,16	0,744

So entsteht z.B. die Wahrscheinlichkeit für Zustand Z_4 nach drei Spielen folgendermaßen aus der Verteilung nach zwei Spielen: $0,744 = 0,6 \cdot 0,24 + 1 \cdot 0,6$.

Allgemein muss man jeweils die Wahrscheinlichkeit für den Zustand Z_j mit der Übergangswahrscheinlichkeit von Z_j nach Z_k multiplizieren und die erhaltenen Wahrscheinlichkeiten aufsummieren. Als Ergebnis erhält man die Wahrscheinlichkeit für Z_k auf der nächsten Stufe.

Schreibt man statt der Zahlen allgemein $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$,

so ergibt sich die nächste Zustandverteilung \vec{v}' aus

$$\begin{aligned}
 v_1' &= 0 \cdot v_1 + 0,6 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \\
 v_2' &= 0,4 v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \\
 v_3' &= 0 \cdot v_1 + 0,4 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 \\
 v_4' &= 0,6 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4
 \end{aligned}$$

Die eingefügten Nullen zeigen, dass man diese Berechnung kurz mithilfe der „Übergangsmatrix“

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in der Form $\vec{v}' = U \cdot \vec{v}$ schreiben kann.

Die Übergangsmatrix erhält man einfach durch Anlegen einer Tabelle aus dem Prozessdiagramm, indem man die Übergangswahrscheinlichkeiten spaltenweise einträgt:

	Von Zustand
--	-------------

Nach Zustand	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄
Z ₁	0	0,6	0	0
Z ₂	0,4	0	0	0
Z ₃	0	0,4	1	0
Z ₄	0,6	0	0	1

III Iterative Berechnung von Zustandsverteilungen.

Die Berechnungen von Abschnitt II lassen sich folgendermaßen mit dem TI-83 Plus durchführen.

Die Übergangsmatrix wird im Matrixeditor als Matrix [A] eingegeben:

- 2^{nd} x^{-1} [MATRIX]
- \blacktriangleright \blacktriangleright [EDIT]

Mit der Taste ENTER oder 1 wird der Matrixeditor erreicht. Dort werden Matrizen eingegeben. Die Matrixgröße (4 Zeilen und 4 Spalten) wird in der obersten Zeile eingegeben:

- 4 ENTER 4 ENTER

Es folgt zeilenweise die Eingabe der Elemente, die jeweils mit ENTER übergeben werden.

Für Änderungen der Matrix kann man sich mit den Cursortasten bewegen und gewünschte Änderungen vornehmen.³

Die Startverteilung wird auch im Matrixeditor eingegeben, und zwar in der Matrix [B] als 4 x 1 – Matrix:

- 2^{nd} x^{-1} \blacktriangleright \blacktriangleright 2
- 4 ENTER 1 ENTER

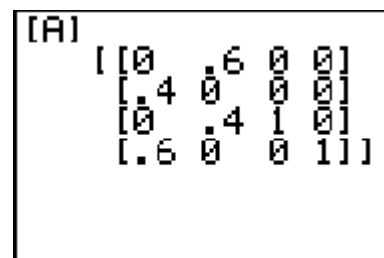
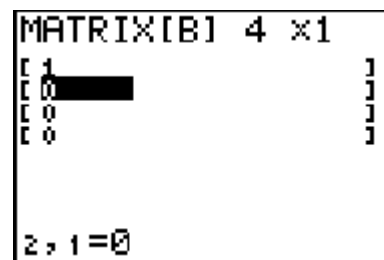
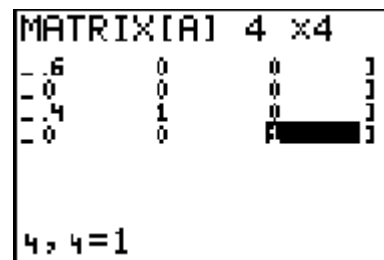
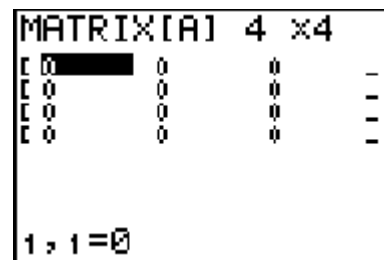
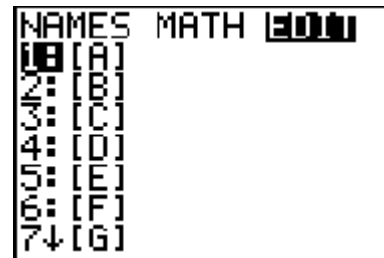
Es reicht die 1 in der ersten Zeile einzugeben, da die Nullen schon vorbelegt sind.

Die Berechnungen werden im Rechenfenster vorgenommen:

- 2^{nd} MODE [QUIT]

Mithilfe des Matrix-Fensters kann man die Matrizen für das Rechenfenster aufrufen, z.B. wird folgendermaßen die Matrix [A] angezeigt:

- 2^{nd} x^{-1} 1 ENTER

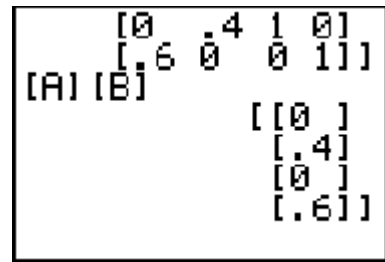


³ Für spätere Änderungen der Matrix erreicht man den Matrixeditor auf dieselbe Weise. Man kann sich dort mit den Cursortasten bewegen und gewünschte Änderungen vornehmen. Auch die Matrixgröße kann man nachträglich ändern, indem man die Zeilen- bzw. Spaltenzahl in der Kopfzeile abändert.

Die Multiplikation der Matrizen [A] und [B] wird folgendermaßen mithilfe des Matrix-Fensters vorgenommen:

□ 2nd x^{-1} 1 2nd x^{-1} 2 ENTER

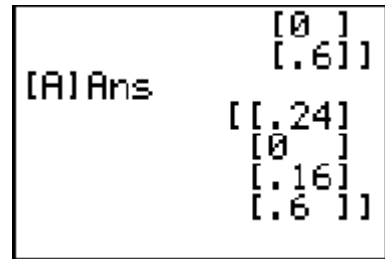
Es ergibt sich der Zustand nach einem Spiel.



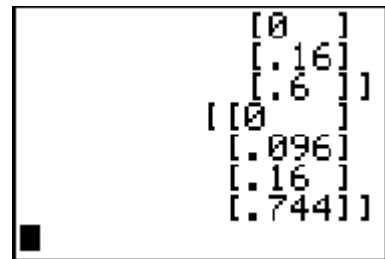
Um die weiteren Zustandsverteilungen zu berechnen, kann man einfach die ANS –Taste verwenden:

□ 2nd x^{-1} 1 2nd (-) ENTER

Es ergibt sich der Zustand nach zwei Spielen.



Danach braucht man nur noch ENTER zu drücken, denn der letzte Befehl wird automatisch wieder ausgeführt, wenn man nichts Neues eingibt.

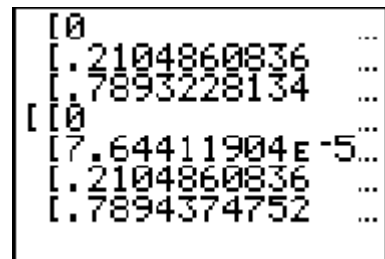


Auf diese Weise kann man beobachten, dass sich offenbar eine Grenzverteilung entwickelt.

Nach zwanzig Spielen ergibt sich nahezu Null als Wahrscheinlichkeit für die inneren Zustände, da das Spiel nur mit geringer Wahrscheinlichkeit noch nicht zu Ende ist.

Mit der Wahrscheinlichkeit von etwa 0,21 gewinnt der Spieler 3€, mit der Wahrscheinlichkeit von etwa 0,79 verliert er seinen Euro.

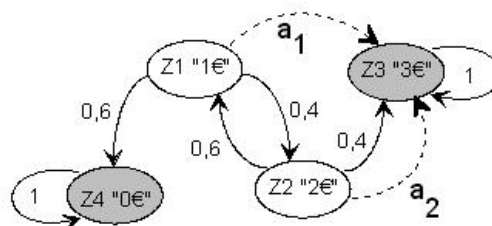
Diese Wahrscheinlichkeiten nennt man Absorptionswahrscheinlichkeiten, denn mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,21 bzw. 0,79 endet das Spiel im absorbierenden Zustand Z_3 bzw. Z_4 .



IV Berechnung von Absorptionswahrscheinlichkeiten – 1. Mittelwertsregel

Die iterative Berechnung der Absorptionswahrscheinlichkeiten liefert nur Näherungswerte und kann sehr lange dauern. Folgende Überlegung führt auf einen direkten Weg. Er soll für die Absorptionswahrscheinlichkeiten des Zustands Z_3 („Gewinn“) für das Spiel um 3€ aufgezeigt werden.

Man fügt im Prozessdiagramm zusätzliche Pfeile von allen inneren Zuständen zu einem interessierenden absorbierenden Zustand ein. An jedem Pfeil wird die Wahrscheinlichkeit eingetragen, *irgendwann* am Pfeilende absorbiert zu werden, wenn man am Pfeilanfang startet. Für den absorbierenden Zustand Z_3 („Gewinn von 3€“) ergeben sich die folgenden gestrichelten Pfeile:



Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,4a_2 \\ a_2 &= 0,6a_1 + 0,4 \end{aligned}$$

Begründung z.B. für die zweite Gleichung:

Um von Z_2 nach Z_3 zu gelangen, gibt es zwei Alternativen, die zusammen a_2 ergeben:

1) Man gelangt mit Wahrscheinlichkeit 0,6 nach Z_1 und von da mit Wahrscheinlichkeit a_1 nach Z_3 , also nach der Pfadregel mit Wahrscheinlichkeit $0,6 \cdot a_1$ von Z_2 über Z_1 nach Z_3 .

2) Man gelangt direkt von Z_2 nach Z_3 mit Wahrscheinlichkeit 0,4.

Man nennt die Vorgehensweise beim Aufstellen des LGS „1. Mittelwertsregel“.

Umgeformt ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 - 0,4a_2 &= 0 \\ -0,6a_1 + a_2 &= 0,4 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystem lässt sich mit dem TI-83 Plus folgendermaßen berechnen.

Zunächst wird die Matrix aus den Koeffizienten eingegeben, hier als Matrix [C]:

2^{nd} x^{-1} \blacktriangleright \blacktriangleright 3 2 ENTER 3 ENTER

```
MATRIX[C] 2 x3
[0 0 0 ]
[0 0 0 ]
1,1=0
```

Im Rechenfenster wird das LGS mit dem Befehl `rref` gelöst:

2^{nd} x^{-1} \blacktriangleright ALPHA $[\text{APPS}]$ 2^{nd} x^{-1} 3 ENTER

```
rref([C])
[[1 0 .21052631...
[0 1 .52631578...
█
```

Durch die Tastenfolge

MATH 1 ENTER

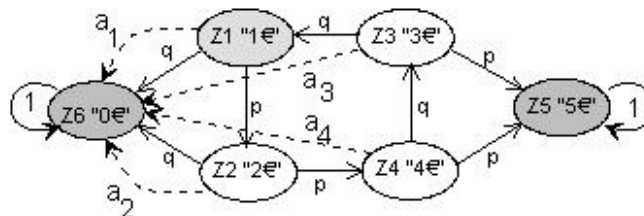
wird das Ergebnis noch mit Brüchen dargestellt.

Die Wahrscheinlichkeit, bei Start mit 1€ am Ende 3€ zu gewinnen, beträgt also $4/19$. Wenn der Spieler anfangs schon 2€ hat, gewinnt er mit der Wahrscheinlichkeit $10/19$ am Ende 3€.

```
rref([C])
[[1 0 .21052631...
[0 1 .52631578...
Ans>Frac
[[1 0 4/19 ]
[0 1 10/19]]
```

Im behandelten Beispiel ist die Berechnung noch so einfach, dass man die Lösung auch ohne Rechner schnell berechnen kann. Folgendes Beispiel „Spiel um 5€“ ist komplexer.

Das Spiel wird nach folgendem Prozessdiagramm durchgeführt. Dabei sei wieder $p=0,4$ und $q=0,6$.

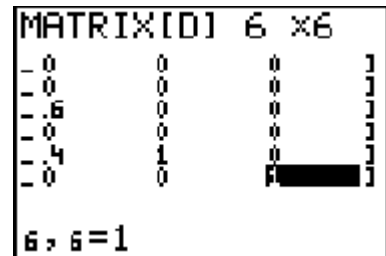


Als Übergangsmatrix ergibt sich

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

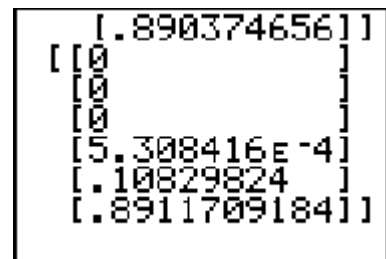
Die Matrix wird als [D] über das Matrix-Edit – Fenster

eingetragen, die Startverteilung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Matrix [E].



Das Iterationsverfahren ergibt nach 10 Schritten die nebenstehende Zustandsverteilung.

Also ist die Wahrscheinlichkeit a_1 , von Zustand Z_1 irgendwann im Zustand Z_6 („Verlust des einen Euro“) zu landen, etwa 89%. Mit etwa 11% Wahrscheinlichkeit landet der Spieler von Z_1 aus einen Gewinn von 5€.



Die anderen Wahrscheinlichkeiten a_i kann man auf diese Weise mit entsprechenden Startverteilungen näherungsweise bestimmen.

Die exakte Lösung ergibt sich mit der 1. Mittelwertsregel aus dem LGS

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,4a_2 + 0,6 \\ a_2 &= 0,4a_4 + 0,6 \\ a_3 &= 0,6a_1 \\ a_4 &= 0,6a_3 \end{aligned}$$

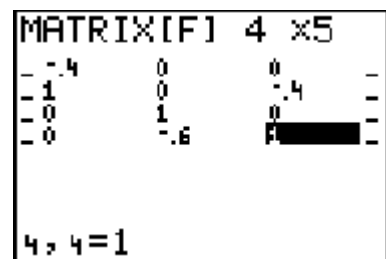
bzw. nach Umformung

$$\begin{aligned} a_1 - 0,4a_2 &= 0,6 \\ a_2 - 0,4a_4 &= 0,6 \\ -0,6a_1 + a_3 &= 0 \\ -0,6a_3 + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die zugehörige erweiterte Matrix wird als 4 x 5 -Matrix [F] eingegeben.

\square 2nd x⁻¹ ►► 6 4 ENTER 5 ENTER

Die Koeffizienten werden zeilenweise eingegeben.



Mit dem Befehl `rref` wird im Rechenfenster das Gleichungssystem gelöst.

- `2nd` `MODE` `[QUIT]`
- `2nd` `[x-1]` `▶` `ALPHA` `[APPS]` `2nd` `[x-1]` `6` `)` `ENTER`

```
rref([F])
[[1 0 0 0 .8913...
 [0 1 0 0 .7283...
 [0 0 1 0 .5348...
 [0 0 0 1 .3208...
 █
```

Die Darstellung mit Brüchen

- `MATH` `1` `ENTER`

ergibt, dass die Wahrscheinlichkeit, von Z_1 aus das Geld zu verlieren, $\frac{525}{589}$ beträgt.

```
[0 0 1 0 .5348...
 [0 0 0 1 .3208...
 Ans>Frac
...0 0 0 525/589]
...1 0 0 429/589]
...0 1 0 315/589]
...0 0 1 189/589]
```

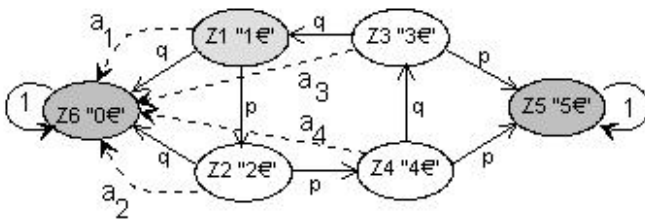
Um den Wert erkennen zu können, kann man mit der Pfeiltaste

- ▶▶▶ das Ergebnis verschieben.

V Die Fundamentalmatrix

Wenn man das Gleichungssystem zur Berechnung der Absorptionswahrscheinlichkeiten in Matrizenform schreibt, eröffnen sich Zusammenhänge mit der Übergangsmatrix. Dadurch lassen sich die Berechnungen mit dem TI-83 Plus übersichtlich durchführen.

Als Beispiel dient nochmals das Spiel aus dem vorhergehenden Abschnitt mit folgendem Prozessdiagramm und der Übergangsmatrix U . Dabei sei wieder $p=0,4$ und $q=0,6$.



$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Absorptionswahrscheinlichkeiten a_1, a_2, a_3, a_4 , von Z_1 bzw. Z_2 bzw. Z_3 bzw. Z_4 aus im Zustand Z_5 absorbiert zu werden, ergab sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,4a_2 + 0,6 \\ a_2 &= 0,4a_4 + 0,6 \\ a_3 &= 0,6a_1 \\ a_4 &= 0,6a_3 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise kann man das folgendermaßen notieren: $\vec{a} = T \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Dabei ist $T = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$ der transponierte Teil der Übergangsmatrix, der die Übergänge

zwischen den inneren Zuständen beschreibt. Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der transponierte Teil der

Übergangsmatrix, der den direkten Übergang von den inneren Zuständen zum Zustand Z_6 beschreibt.

Aus der Matrixgleichung ergibt sich

$$\vec{a} - T \cdot \vec{a} = \vec{b}, \text{ oder mit der passenden Einheitsmatrix } (E - T) \cdot \vec{a} = \vec{b}, \text{ also } \vec{a} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{b}$$

Die Matrix $F = (E - T)^{-1}$ heisst Fundamentalmatrix der absorbierenden Markoffkette. Sie kann bei einem sinnvollen Problem als existent vorausgesetzt werden.

Die Berechnung der Absorptionswahrscheinlichkeiten kann nun mit dem TI-83 Plus folgendermaßen durchgeführt werden.

Die Matrix U wurde im vorhergehenden Abschnitt als [D] über das Matrix-Edit – Fenster eingegeben.

```
MATRIX[D] 6 x6
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[.6 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[.4 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
6, 6=1
```

Die passende 4 x 4 – Einheitsmatrix wird folgendermaßen über das MATRIX – MATH - Menü im Rechenfenster erzeugt und als Matrix [E] abgespeichert:

2^{nd} [MODE] [QUIT]

2^{nd} [x^{-1}] \blacktriangleright [5]

[4] [)] [STO] \blacktriangleright 2^{nd} [x^{-1}] [5] [ENTER]

```
NAMES [MATH] EDIT
1:det(
2:r
3:dim(
4:Fill(
5:identity(
6:randM(
7:augment(
```

```
identity(4)→[E]
[[1 0 0 0]
 [0 1 0 0]
 [0 0 1 0]
 [0 0 0 1]]
```

Zur Erzeugung der Fundamentalmatrix $F = (E - T)^{-1}$ ist zunächst noch eine Teilmatrix von $U=[D]$ zu erzeugen. Leider gibt es keinen Befehl zur Ausgabe einer Teilmatrix der Matrix [D], aber man kann das Problem im vorliegenden Fall durch Neudimensionieren lösen.

Zunächst wird die Matrix D nochmals als Matrix C abgespeichert:

2^{nd} [MODE] [QUIT]

2^{nd} [x^{-1}] [4] [STO] \blacktriangleright 2^{nd} [x^{-1}] [3] [ENTER]

```
[D]→[C]
[[0 0 0 0]
 [.4 0 0 0]
 [0 0 0 .6]
 [0 .4 0 0]
 [0 0 .4 .4]
 [.6 .6 0 0]]
```

Nun wird die Matrix [C] als 4 x 4 – Matrix neudimensioniert und so die gewünschte Teilmatrix extrahiert.

2^{nd} [x^{-1}] \blacktriangleright \blacktriangleright [3] [4] [ENTER] [4] [ENTER]

```
MATRIX[C] 4 x4
[0 0 0 0]
[.4 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 .4 0 0]
1, 1=0
```

Nun kann F im Rechenfenster erzeugt werden. Dazu ist noch [C] zu transponieren und die Inverse $(E - T)^{-1}$ zu bilden, das Ergebnis wird in der Matrix [F] gespeichert.

2^{nd} [MODE] [QUIT]

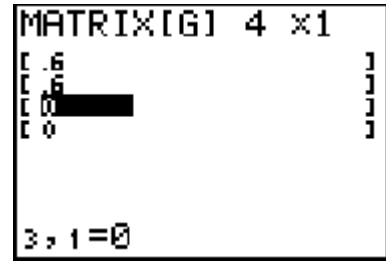
[(2^{nd} [x^{-1}] [5] [- 2^{nd} [x^{-1}] [3] 2^{nd} [x^{-1}] \blacktriangleright [2] [)] [x^{-1}]

[STO] \blacktriangleright 2^{nd} [x^{-1}] [6] [ENTER]

```
([E]-[C]T)^-1→[F]
[[1.061120543 0 0 0]
 [.1528013582 1 0 0]
 [.636672326 0 1 0]
 [.3820033956 0 0 1]]
```

Der Vektor \vec{b} wird einfach als Matrix [G] neu eingegeben:

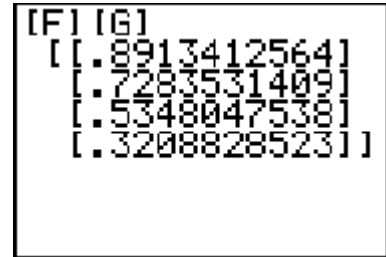
2nd x^{-1} 7 4 ENTER 1 ENTER .6 ENTER .6 ENTER



Nun kann die Lösung $\vec{a} = F \cdot \vec{b}$ berechnet werden; sie stimmt mit der Lösung des vorhergehenden Abschnitts überein:

2nd MODE [QUIT]

2nd x^{-1} 6 2nd x^{-1} 7 ENTER

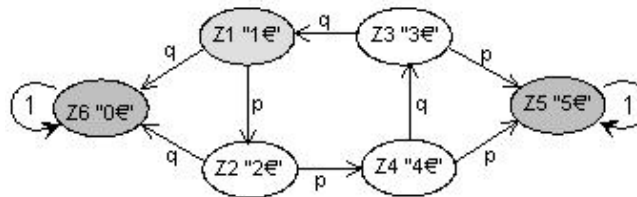


VI Mittlere Wartezeiten – 2. Mittelwertsregel

Bei Markoffketten mit absorbierenden Zuständen interessieren nicht nur die Absorptionswahrscheinlichkeiten, sondern auch, wie lange es im Mittel dauert, bis ein absorbierender Zustand erreicht wird.

Die Berechnung dieser mittleren Wartezeiten soll wieder an dem Spiel um 5€ aus Abschnitt IV behandelt werden. Das zugehörige Prozessdiagramm ist nochmals angegeben.

Es soll wieder $p=0,4$ und $q=0,6$ gelten.



Es sollen m_1, m_2, m_3, m_4 die mittleren Wartezeiten bezeichnen für Absorption aus dem Zustand Z_1 bzw. Z_2 bzw. Z_3 bzw. Z_4 . Dann gilt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 1 + 0,4m_2 \\
 m_2 &= 1 + 0,4m_4 \\
 m_3 &= 1 + 0,6m_1 \\
 m_4 &= 1 + 0,6m_3
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

Begründung z.B. für die zweite Gleichung:

Um von Z_2 aus zu einem absorbierenden Zustand zu gelangen, gibt es zwei Alternativen:

- 1) Mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 gelangt man in einem Schritt zum absorbierenden Zustand Z_6 . Dafür braucht man also im Mittel $0,6 \cdot 1$ Schritte.
- 2) Mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 gelangt man in einem Schritt nach Z_4 und von da in durchschnittlich m_4 Schritten zu einem absorbierenden Zustand. Dafür braucht man also im Mittel $0,4 \cdot (1 + m_4)$ Schritte.

Insgesamt braucht man also $0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot (1 + m_4) = 1 + 0,4m_4$ Schritte, um zu einem absorbierenden Zustand zu gelangen.

Allgemein gilt die „2. Mittelwertregel“ :

In einer absorbierenden Markoff-Kette mit n Zuständen und der Übergangsmatrix U gilt für die mittlere Wartezeit m_i in Schritten von einem inneren Zustand Z_i bis zur Absorption:

$$m_j = 1 + m_1 u_{1j} + \dots + m_n u_{nj}$$

Dabei ist $m_k = 0$ für alle absorbierenden Zustände Z_k zu setzen.

Die umgeformte Gleichung

$$\begin{array}{rcl} m_1 & - & 0,4m_2 & & = & 1 \\ & & m_2 & & - & 0,4m_4 & = & 1 \\ -0,6m_1 & & & + & m_3 & & = & 1 \\ & & & & - & 0,6m_3 & + & m_4 & = & 1 \end{array}$$

lässt sich wieder mit dem TI-83 Plus lösen.

Die zugehörige erweiterte Matrix wird als 4×5 -Matrix [H] eingegeben.

$\boxed{2\text{nd}} \boxed{x^{-1}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{\text{ENTER}} \boxed{5} \boxed{\text{ENTER}}$

Die Koeffizienten werden zeilenweise eingegeben.

Mit dem Befehl `rref` wird im Rechenfenster das Gleichungssystem gelöst.

$\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{MODE}} \boxed{[QUIT]}$

$\boxed{2\text{nd}} \boxed{x^{-1}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{[APPS]} \boxed{2\text{nd}} \boxed{x^{-1}} \boxed{8} \boxed{\text{ENTER}}$

Man braucht also im Mittel etwa 1,8 Schritte, um vom Zustand Z_1 aus zu einem absorbierenden Zustand zu gelangen, etwa 1,9 Schritte, um vom Zustand Z_2 aus zu einem absorbierenden Zustand zu gelangen, etwa 2,1 Schritte, um vom Zustand Z_3 aus zu einem absorbierenden Zustand zu gelangen und etwa 2,2 Schritte, um vom Zustand Z_4 aus zu einem absorbierenden Zustand zu gelangen.

Wenn man wie in Abschnitt V die Fundamentalmatrix bestimmt hat, kann man noch schneller zur Lösung gelangen. Denn in Matrixschreibweise ergibt sich für das lineare Gleichungssystem (*):

$$\vec{m} = \vec{1} + T \cdot \vec{m}, \text{ also } (E - T) \cdot \vec{m} = \vec{1} \text{ und daher } \vec{m} = F \cdot \vec{1}.$$

Dabei ist (vgl. Abschnitt V): $T = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$, $F = (E - T)^{-1}$ und $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Berechnung der mittleren Wartezeiten kann nun mit dem TI-83 Plus folgendermaßen durchgeführt werden.

Falls die Matrix T nicht mehr von einer vorhergehenden Rechnung gespeichert ist, gibt man sie im Matrix-Editor als Matrix [C] ein:

$\boxed{2\text{nd}} \boxed{x^{-1}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{3} \boxed{4} \boxed{\text{ENTER}} \boxed{4} \boxed{\text{ENTER}}$

Die Matrixelemente werden zeilenweise eingegeben.

Die passende 4×4 – Einheitsmatrix wird folgendermaßen über das MATRIX – MATH - Menü im Rechenfenster erzeugt und als Matrix [E] abgespeichert:

2^{nd} MODE [QUIT]

2^{nd} x^{-1} \blacktriangleright 5

4 $)$ STO \blacktriangleright 2^{nd} x^{-1} 5 ENTER

```
NAMES [MATH] EDIT
1:det(
2:Y
3:dim(
4:Fill(
5:identity(
6:randM(
7:augment(
```

```
identity(4)→[E]
[[1 0 0 0]
 [0 1 0 0]
 [0 0 1 0]
 [0 0 0 1]]
```

Nun kann F im Rechenfenster erzeugt werden, das Ergebnis wird in der Matrix [F] gespeichert.

2^{nd} MODE [QUIT]

$($ 2^{nd} x^{-1} 5 $-$ 2^{nd} x^{-1} 3 $)$ x^{-1}

STO \blacktriangleright 2^{nd} x^{-1} 6 ENTER

```
([E]-[C])→[F]
[[1.061120543
 [.1528013582 1...
 [.636672326 ...
 [.3820033956 ...
```

Der Vektor $\vec{1}$ wird als Matrix [I] gespeichert.

2^{nd} x^{-1} \blacktriangleright \blacktriangleright 9 4 ENTER 1 ENTER

Die Matrixelemente werden zeilenweise eingegeben.

```
MATRIX[I] 4 x1
[[1
 [1
 [1
 [1]]
4, 1=1
```

Nun wird $\vec{m} = F \cdot \vec{1}$ berechnet:

2^{nd} MODE [QUIT]

2^{nd} x^{-1} 6 2^{nd} x^{-1} 9 ENTER

Das Ergebnis ist dasselbe wie zuvor.

```
[.636672326 ...
 [.3820033956 ...
[F][I]
[[1.75721562 ]
 [1.893039049]
 [2.054329372]
 [2.232597623]]
```

Weitere Aspekte und viele Aufgaben zum Thema Markoffketten finden sich z.B. im „Lambacher-Schweizer“ Stochastik (Neuausgabe 2003), Klett Verlag, ISBN 3-12-732430-8.

Stichwortverzeichnis

- 1-PropZTest 20
- 1-Var Stats 4
- absorbierende Zustände 36
- Absorptionswahrscheinlichkeiten
 - Bedeutung 39
 - Berechnung 39
- Abweichungsfaktor 15
- Annahmereich 18, 20
- ANS –Taste verwenden 39
- Bernoullikette 7
- Bildschirm-Grafik löschen 28
- binomcdf 5, 7
- Binomialkoeffizienten 3
- Binomialverteilung 5, 7, 28
- binompdf 5, 7, 28
- BoxPlot 4
- ClrDraw 28
- Diagramm
 - Folgenmodus 9
 - Liste 10
 - Treppendiagramm 8
- Entscheiden 20
- Erwartungswert 6, 12, 14
- Fakultät 3
- Flächeninhalt 13
- Folgenmodus 28
- Fundamentalmatrix 42
- ganzrationale Funktion bestimmen 34
- Gauß-Funktion 13
- Gleichungssystem 35, 39
- Glockenform
 - anpassen 14
 - Binomialverteilung 12
 - Gauß-Glocke 13
- Glücksrad 26
- Grenzverteilung 39
- Histogramm 25, 27, 30
- Hypothesentest
 - einseitig mit Rechnerfunktion 23
 - einseitig und zweiseitig 21
 - Prinzip 18
 - Signifikanztest 20
 - zweiseitig mit Rechnerfunktion 20
- Integral 19
- invNorm 5
- Kombinatorik 3
- Kurvenanpassung 32
- Lernleistungen 2, 5, 36
- Liste 3, 10, 24, 32
- Listen definieren 34
- Markierung 32
- Markoffketten 36
 - Aufgaben 46
- Matrixeditor 35, 38
- mean 3
- Median 4
- Mittelwert 3, 4
- Mittelwertsregel
 - erste 40
 - zweite 45
- mittlere Wartezeiten 44
- Multiplikation von Matrizen 39
- normalcdf 5, 18
- normalpdf 5, 31
- Normalverteilung 5
- Nullhypothese 20
- Permutationen 3
- Prozessdiagramm 36
- QuadReg 33
- Quartil 4
- rand 3
- randBin 3, 26
- randInt 3, 24
- randNorm 3, 30
- Regression 32
- round 8
- rref 35, 40
- selbstorganisiertes Lernen 5
- seq 10, 25
- Signifikanzniveau 19, 20
- Signifikanztest 18, 20
- Standardabweichung 3, 4, 6, 12, 17
- statistische Berechnungen 4
- statistische Tests 6
- StatPlot 5, 24
- stdDev 3
- Stichprobenumfang 20
- Summenfunktion 7
- Transponierte 44
- Übergangsmatrix 37
- Übergangswahrscheinlichkeiten 36
- Varianz 17
- Wahrscheinlichkeitsverteilung 5
- Wertetabelle 8
- Zufallsexperimente
 - Simulation 24
- Zufallsvariable 7
- Zufallszahlen 3
 - binomial verteilt 26
 - ganzzahlig 24
 - normal verteilt 30
- Zustandsverteilung
 - Definition 36
 - Herleitung 37
 - iterative Berechnung 38
- Zustandswahrscheinlichkeiten 36
- σ -Intervalle
 - Bedeutung 18
 - Parameter 19, 22
 - Wahrscheinlichkeiten einseitig 22
 - Wahrscheinlichkeiten zweiseitig 19



Dieter Brandt

Mathematik unterrichten
mit TI-83 und TI-83 Plus
in den Klassen 11 bis 13
– Baden-Württemberg –

Teil III – Stochastik

Texas Instruments - E&PS -
Haggertystr. 1
D-85350 Freising

Texas Instruments GmbH
Rennweg 79-81
A-1030 Wien

Texas Instruments ITC
Leutschenbachstr. 95
CH-8050 Zürich

Customer Support Center
06196 - 975015

Customer Support Center
01 – 502910007

Customer Support Center
Zürich: 01 - 2730688
Geneve: 022 - 7100010

ti-cares@ti.com
education.ti.com/deutschland

ti-cares@ti.com
education.ti.com/oesterreich

ti-cares@ti.com
education.ti.com/schweiz

Umweltfreundlich gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

83PL/SL/1E5/D